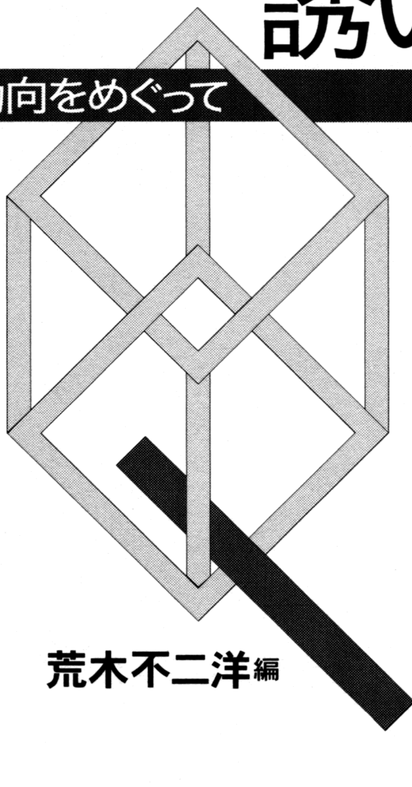
数理物理への誘い４

最新の動向をめぐって



荒木不二洋 編

遊星社

数理物理への誘い 4

目　　次

装丁＝海保 透

【第1集の内容】

【第2集の内容】

【第3集の内容】

まえがき

この本は「数理物理への誘い」シリーズの第4集です．第1集，第2集，第3集は，それぞれ1994年，1997年，2000年に刊行されました．といっても，それぞれの話は独立していて，どの集のどの話から読み始めてもかまいません．

物理学の画期的な基礎理論は，対応する数学の概念や方法と絡まって創られてきました．ニュートン力学は微積分学との双子として生まれ，それぞれ理論物理学と解析学へ大きく成長しました．一般相対性理論は微分幾何学の概念や方法の助けを借りてアインシュタインが創りましたが，そのあと独自に発展した微分幾何学は半世紀余りを経て場の理論のヤン－ミルズ場を通して理論物理学に再会します．量子力学はヒルベルト空間論を数学的な基礎としますが，後者を舞台とする作用素のスペクトル理論や作用素環論は，量子力学のみならず場の量子論や量子統計力学と相互作用をしながら発展し，最近は数学の他分野とも多様で思いがけない出会いを生じています．このような数学と物理学の絡みの面白さを，わかりやすい話の中から感じとっていただきたいというのが，このシリーズの主旨です．

そのような数理物理学の多様で面白い展開を広く学生や研究者の方々に知っていただくため，1987年からほぼ毎年学習院大学で同大学の江沢洋教授と共同でサマー・スクール「数理物理X」（Xは開催年の表示）を企画開催してきました．そこでは学生や専門外の研究者によくわかるよう入門的な講義をお願いしていますが，その講義予稿をもとに，そのエッセンスとモチーフを，一般向けにできるだけやさしくお話ふうにお書きいただき，さらにその後の

進展にも触れていただくよう，講師の先生にお願いして出来上がったのが，このシリーズのお話です．たとえば大学生や大学院生，高校の先生方などに楽しくお読みいただけるのではないかと考えています．

第1話と第2話は，くりこみ50年を記念した1999年のサマー・スクールの話題です．「くりこみ」というのは，量子力学の処方を電磁場や素粒子の場に適用して遭遇した「無限大の困難」を乗り越えるために考え出された処方です．素粒子を記述する場の理論には，質量 m がパラメータとして入っています．計算を進めていくと，たとえば素粒子自身の発する電磁場と自己作用を起こして余分のエネルギーが発生します．一般相対性理論によるとエネルギーは質量と等価なので，これが余分の質量 δm になり，素粒子の質量は $m+\delta m$ になります．実はこの余分の質量を計算すると無限大になって困っていたのです．しかし，「この $m+\delta m$ を観測される質量と考えて有限な観測値におきかえ，すべての物理量を m の代わりにこの観測値で書いてしまうと，無限大を隠してしまうことができる」というのが，くりこみの考え方です．この考えは「くりこみ群」という形で数学的な方法として定式化され，場の理論だけではなく物性論にも使われています．第1話は，このくりこみ及びくりこみ群について，ことの起こりから最近の発展まで，その考え方をやさしく解説したお話です．第2話では，統計力学のイジング模型など具体的なモデルを使い，やさしい計算を通じてくりこみ群の使い方を解説しています．

第3話は，非平衡系をテーマにした2001年の講義からのお話です．多数の分子がぶつかりあって飛び交う気体や液体など物質の平均的大局的な振る舞いを取り扱う基礎理論は統計力学ですが，その中で物質のもっとも安定な状態は平衡状態と呼ばれ，その統計力学的扱いはある程度の完成品ができています．それに対し，そのような安定な状態に達していない系は非平衡系と呼ばれ，その理論は現在発展している研究課題です．この第3話では非平衡系が平衡状態に落ち着く「緩和現象」について，イジング模型の例をとり，緩和

（平衡状態への落ち着き方）が遅いか速いかの違いを，相転移点かどうかに関係づける理論を，やさしく解説しています．

第4話と第5話は，非可環幾何学をテーマにした1997年の講義からのお話で，最近の物理学と数学の興味深い接点の話題です．作用素環は大雑把にいうと，ヒルベルト空間上の作用素の集合で四則演算と極限操作がそのなかで遂行可能なものを指し，量子系の物理量の記述に基本的なものですが，専門家以外の人々には最近まで馴染みがありませんでした．二つの作用素環の包含関係を研究するのが部分因子環の理論ですが，1980年代にジョーンズが部分因子環の研究のなかから，それとは全然関係がなさそうに見える結び目の理論に対する決定的な成果を与え，1990年にフィールズ賞を受賞するに至って，広く知られるようになりました．他方，場の量子論では，作用素環を1960年代から基礎理論に使っていましたが，1970年代初頭にそこで展開されたセクター理論で導入されていた統計パラメータ（ボーズ，フェルミ等の素粒子の統計を記述する）が，実は部分因子環にジョーンズが導入したジョーンズ指数と本質的に同じものであることがわかりました．第4話ではこの状況が解説されます．

位相空間を記述するのに，その空間上のよい関数全体の作る代数系を使うことができることが知られています．この代数は可環，すなわち二つの関数 f と g の掛け算をするとき，fg と gf は等しいのですが，一般の作用素環ではこのことが成立せず，非可環であるといわれます．それを前者の関数環にならって，幾何学とみなすことが有益な視点を与えることがわかり，非可環幾何学と呼ばれています．第5話では，このような非可環幾何学を背景として，微分方程式への応用で有名なアティヤ-シンガーの指数定理とその一般化が解説されます．

第6話と第7話は，量子力学の具体的なハミルトン作用素の数学的研究の創始者として著名な加藤敏夫先生のご逝去を悼んで，ハミルトン作用素のスペ

クトル解析をテーマとした2000年の講義からのお話です．第6話では，量子化された自由場（電磁場を想定）の作用を受ける粒子の量子力学的な振る舞いのうち，点スペクトルで表される基底状態（安定状態）についてのお話で，とくに具体的問題での確率論的な汎関数積分の応用の解説が見所です．

第7話は量子力学のハミルトン作用素などを，そのスペクトルや散乱行列などの（いわば観測される）情報から特定する問題（逆問題といわれる）についてのお話です．1次元の場合と多次元の場合とで，類似する点もあれば相違点もありますが，それをくわしく解説しています．

サマー・スクール「数理物理X」の講師の先生方は，第一線の研究者として多忙であり，執筆していただけない場合も多いのですが，今回本書の企画に賛同して原稿を寄せていただいた先生方に，心から感謝の意を表したいと思います．また，本書の完成のため努力して下さった遊星社の西原昌幸さんに感謝致したいと思います．

2002年7月

荒木不二洋

くりこみ群と素粒子論

青木健一

素粒子論というのはミクロにこの世の中を見ていくときに，物は何からどうやってできているのか，どういう粒子がどういう相互作用をしているのか，を研究する学問です．一方，くりこみ群というのは，最近ではいろいろな所（理論物理に限らない）で使われている手法の総称的な呼び名になっていますが，その元々は，約50年前に当時の素粒子論の最前線である量子電気力学の困難に遭遇した朝永振一郎たちが発明した「くりこみ」に端を発しています．以下では，まず「くりこみ」が発明される直前の理論物理学の困難から始めて，くりこみ理論と素粒子論の発展を追いかけます．その中で最後に登場してくる真打が「くりこみ群」です．そして，この「くりこみ群」という理論の捉え方がどういう特徴を持っているのかを簡単に説明したいと思います．難しい数学は使いませんから，気楽に最後まで読んでください [1, 8].

1° 朝永たちの発明：くりこみ

歴史の始まりに戻りましょう．19世紀末に完成の域に達した古典物理学はニュートン以来の力学，マックスウェルによって完成された電磁気学，ボルツマンたちによって整備された熱統計力学，にまとめられていました．これらを適用すると，光の速度の絶対性が説明できないこと，真空の比熱が無限大になってしまうこと，が2大問題でした．最初の問題はアインシュ

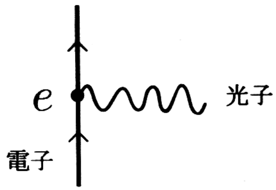


図1　量子電気力学の相互作用

タインの相対性理論によって解決され，二つ目の問題は，多くの実験を経て，ミクロの物理学の新体系，量子力学の建設に導きました．完成されるや量子力学は，堰を切ったようにあらゆる物理現象に適用されました．そして，マックスウェルの電磁気学を量子化した理論が量子電気力学と呼ばれ，電子と光子の相互作用を扱う新しい理論となりました．

それはすばらしい理論で，それまでの多くの実験事実を説明したのですが，その理論で計算を進めると意外な困難に遭遇したのです．量子電気力学は場の理論（場の量子論）といわれるものの典型です．場の理論とは，相対性理論を満たすように作られた量子力学のことで，電場や磁場などの空間に分布した「場」と呼ばれる物理量の量子力学になっています．この場の理論がそれまでの理論と決定的に異なるのは，粒子の生成・消滅が記述できる，ということです．粒子の生成・消滅なんてことは，古典物理学ではどうやって記述したらいいのか想像すらできないことでしたから．

量子電気力学では電子と光子が役者で，電子は光子を出したり吸ったりできるのです．これが基本相互作用であり，この相互作用の組み合わせであらゆる量子力学的な過程が記述されるのです．それを図1のように書くのが便利です．そこでは，実線が電子を表し，波線が光子を表しています．この一つのグラフで光子が入る場合も出る場合も同時に表します．そして，その相互作用の強さがちょうど電子の電荷 e になっています．

電子は自分で出した光子をまた自分で吸うこともできます．こういう量

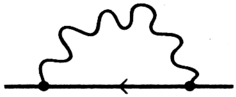


図2　電子の自己エネルギー

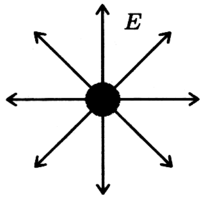


図3　電子の作る電場

子力学的過程は電子の自己エネルギーと呼ばれ，図2のように書きます．こういう図を書いて計算していく方法を発明したのがファインマンなので，ファインマングラフと呼びます．

どうしてこれを自己エネルギーと呼ぶのでしょうか．実は，電子の自己エネルギーというのは，マックスウェルの古典電磁気学でもすでに大問題でした．電子がポツンと存在していると，電子は電荷を持っているので，その周りには図3のようにクーロン場と呼ばれる電場が存在しています．電場があればそこにはエネルギーがあることがわかっていました．実際，電波というのは，振動する電場と磁場を使って空間中でエネルギーを伝えるわけですから，電場や磁場があるとその場所にエネルギーが存在するのです．

電子が作る電場のエネルギーは次のように計算されます．電子からの距離を r とすると電場は $1/r^2$ に比例します．電場のエネルギーは電場の2乗に比例しますので，結局，全空間での電場のエネルギーの合計は，

$$W \propto \int (E(x))^2 \, d^3x \propto \int_a^\infty \frac{1}{r^4} r^2 dr \propto \frac{1}{a} \tag{1}$$

ここで，a は電子の半径です．電子は点粒子だと思って電子の半径を 0 に

もっていってこれを計算すると無限大になってしまい，電子を動かそうとしても動かせないということになります．というのは，電子を動かそうとすると電子に付いている放射状の電場を一緒に動かさないといけないのですが，その電場のエネルギーは無限大なので，相対性理論のエネルギーと質量の同等性から，電子の質量は無限に重いということになるからです．このパラドックスは古典電磁気学では解決できません．

いまは電場のエネルギーとして計算しましたが，これは電子が作った電場の中で電子自身が感じるエネルギーと同じことなので，それはまさに，自分で出した光子を自分で吸って感じていることに対応しています．だから，量子電気力学での図2の過程で電子の自己エネルギーが計算されるのです．さて，その計算をすると，上の古典電磁気学の発散よりは少し発散の度合いは下がって，対数発散と呼ばれるものになります．古典論よりはましになったわけですが，とにかく発散は発散です．こういう無限大が出てきて量子電気力学の建設者たちは困ったわけです．

当時の朝永たちの言葉です．「その最初の近似で満足する限り ･･･ 実験と極めてよく一致する結果を与えてくれる．･･･ けれどもその場合に，もう一歩近似を進めて更に精確な答えを出そうとすると，例の無限大の困難が現れて，万事がだめになってしまう．･･･ いずれにしても素粒子の自己エネルギーは場の量子論の癌である．しかも量子電磁力学は一面に於ては実験とよく一致する部分を有しているので，それだけますますここでは理論形式の欠陥が純粋な形で明瞭に浮かび上がってくる」[3].

量子電気力学による計算は，まずはループを含まないグラフだけで計算します．それをツリー（樹木型）近似と呼びます．このときにはなんら無限大が現れず実験ともばっちりで，これが朝永の言う「最初の近似」に対応します．ループを含むグラフ（たとえば図2）を計算したとたんに，無限大が現れてしまいます．ループは量子力学的な仮想状態の足し上げを意味し

ています．図2はループが一つなので1-ループグラフと呼ばれます．ループの数が多いグラフを計算して足すことで，近似のレベルが上がります．

最終的に，朝永たちは量子電気力学を救うアイデアに到達します．それが「くりこみ」です．朝永，シュウィンガー，ファインマン，ダイソンらによるくりこみ理論では，先ほどの自己エネルギーによる電子質量への追加補正を入れたものが観測される電子の質量であると考えます．このこと自身はあまりにも自明な論理ですね．式で書けば，

$$m + \delta m = m_{\mathrm{obs}} \tag{2}$$

となります．m が最初からある電子の質量，δm が図2による追加の自己エネルギーからくる電子の質量です．この合計こそが観測されている電子の質量 m_{obs} のはずであり，それが有限の値になるべきなのです．ということは，最初からある電子の質量も何か負の無限大を持っており，それに正の無限大である自己エネルギー効果が加わって，やっとこさ有限の電子の質量になっているということになります．

実は，電子の電荷についても同じことが起きます．電子の電荷は量子電気力学の言葉で言うと，電子がどれくらいの強さで光子を出したり吸ったりするのか，ということです．電子が光子を出す過程には，図1にある基本相互作用に加えて，量子力学的な仮想状態を経由するループグラフ（図4）も補正として追加されます．このグラフもループがあるために無限大になってしまいます．ここでも同じように，電子の観測される電荷は元々の電子の電荷 e と図4による追加の過程の効果 δe の和であると考え，この和が観測している電子の有限の電荷 e_{obs} であるとするわけです．

$$e + \delta e = e_{\mathrm{obs}} \tag{3}$$

最初からあるものに補正が加わってその和が観測される，これ自身は当たり前です．しかし当たり前でないのは，次の事実です．量子電気力学と

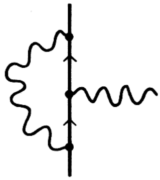


図4　電子の電荷への補正グラフ

いう理論は，パラメータとして電子の元々の質量 m と電荷 e（これをよく裸の質量と電荷と呼びます）を持っているわけですから，あらゆる物理量の理論計算結果は m と e の関数として計算されます．これを抽象的に

$$\text{理論予言} = F(m, e) \tag{4}$$

と書きましょう．この関数が発散していた，というのがそもそもの問題でした．裸の質量に補正が加わったものが観測される質量ですから，その関係式（2）を逆に解くと，裸の質量は観測される質量の関数で書けます．電荷についても同じです．ただし，質量補正の計算には電荷が入ってくるし，電荷補正の計算には質量が入ってくるので，2変数の連立方程式を解くことになります．これを上の計算結果に代入して，計算結果をすべて m_{obs} と e_{obs} の関数 G にします．

$$\text{理論予言} = G(m_{\text{obs}}, e_{\text{obs}}) \equiv F(m[m_{\text{obs}}, e_{\text{obs}}], e[m_{\text{obs}}, e_{\text{obs}}]) \tag{5}$$

するとこの新しい関数 G は有限の関数になっているのです．関数 G は関数 F とは全然違う関数です．F は無限大を含むどうしようもない関数，G は有限にきちんと定義された関数です．有限な関数 G に実際に観測されている有限の $m_{\text{obs}}, e_{\text{obs}}$ を入れれば，当然，結果は有限に得られます．これがすべての物理量について成立するのです．こうして，すべての答えは有限にそして確実に予言できることがわかります．これがくりこみ理論の内容です．これは全然自明じゃない，驚くべきことです．

くりこみ理論が完成したころは，それは興奮したわけです．そのころの雰囲気を伝える文章を引きます.「この様にして，現在の場の理論が持っている根本的な矛盾は質量と荷電と言う物質そのものの持つ属性の中に集約させる事が出来た．この事は，発散の波浪の中に漂泊していた場の理論にとってまさに驚くべき進歩であり，“量子論的場の理論の神秘の扉の一枚が開かれた”」[4]．確かに，そのとおりです．$m_{\rm obs}$ と $e_{\rm obs}$ で表したときに何から何まで有限な関数になるということは，感動的だったに違いないですね．

2° くりこみ可能な理論

この驚きの結果は，その後の解析により一般化されて理解され，何か「くりこみ可能な理論」というクラスがこの世に存在するということがわかってきました．少し厳密に言うと，4 次元世界では，相互作用を記述する項のエネルギー次元が 4 以下のものだけになっている理論です．

相互作用の次元の計算方法を見ましょう．相互作用はそれに関与する複数の場の量の積で書かれます．たとえば，図 1 にある量子電気力学の相互作用では，電子の線が二つと光子の線が一つ集まってひとつの頂点を作っています．このときの相互作用は，三つの場の積

$$\overline{\psi}\psi A_\mu$$

になります．スピン 1/2 の場 $\overline{\psi}, \psi$ が電子の出る線と入る線を表し，A_μ が光子の線を表します．この相互作用の次元は，それぞれの場の次元の合計になります．それぞれの場の次元は，

$$\text{次元}\,[\psi] = \text{次元}\,[\overline{\psi}] = 3/2\ , \qquad \text{次元}\,[A_\mu] = 1$$

と決まっています．すると，

$$\text{次元}\,[\overline{\psi}\psi A_\mu] = 4$$

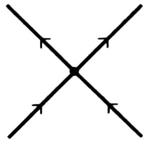


図5　4-フェルミ相互作用

となります．量子電気力学の相互作用は次元が 4 だったわけです．これが量子電気力学でくりこみ理論がうまくいった理由だったのです．

すでにずっと以前から，β 崩壊という相互作用が存在していることがわかっており，弱い相互作用と名づけられていました．それは，図5で表される

$$\overline{\psi}\psi\overline{\psi}\psi$$

というタイプの 4-フェルミと呼ばれる相互作用で記述されます．ここでの $\overline{\psi}, \psi$ は電子やニュートリノなどのスピンが 1/2 の粒子を一般に表しており，それらはフェルミオンと呼ばれるので，フェルミオンが四つで 4-フェルミ相互作用です．

これらのフェルミオン場の次元は電子とすべて同じですから，結局，弱い相互作用の次元は，

$$次元\,[\overline{\psi}\psi\overline{\psi}\psi] = 6$$

となってしまい 4 を越えています．このため弱い相互作用はくりこみ可能な相互作用ではありません．つまり，理論計算を進めたときに出てくる無限大を量子電気力学のときのようにうまくは「くりこめない」のです．しかも問題は弱い相互作用に閉じません．この世の中にある相互作用の中にほんの少しでも 4-フェルミ相互作用のような次元が 4 を越える相互作用が混じっていたら，もともとひとつしかない理論全体がくりこみ可能でなくなってしまいます．こうなると理論の予言は何もできなくなります．

くりこみ可能な相互作用の他の例としては，湯川秀樹が導入した中間子

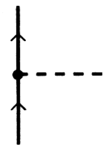


図 6　湯川相互作用

の相互作用があります．これは，スピン 0 の中間子をスピン 1/2 のフェルミオンが出したり吸ったりする相互作用です (図 6)．スピン 0 の中間子の場 ϕ の次元は 1 なので，この相互作用

$$\overline{\psi}\psi\phi$$

の次元は 4 となり，くりこみ可能な相互作用になります．

湯川中間子論では，陽子・中性子とパイ中間子との相互作用でした．その 40 年後，このタイプの相互作用が素粒子統一理論において素粒子質量の起源になっていることがわかり，このおかげで湯川相互作用はいつまでも研究の最前線で呼ばれ続けることになるでしょう．

量子電気力学におけるくりこみ理論というのは，無限大をやりくりしてなかなか危ない印象があるのですが，たとえば電子の磁場中での振る舞いを決める異常磁気能率という物理量で見ると，その理論値と実験値は次のようになっています．

$$\begin{aligned} \mu[\text{実験値}] &= 1.001159652193 \pm 10 \\ \mu[\text{理論値}] &= 1.001159652140 \pm 28 \end{aligned} \tag{6}$$

ちゃんと 10 桁も合っていることがわかります．理論にも誤差がついていますが，複雑な計算の数値計算による誤差や，評価しきれない強い相互作用の影響などです．これは，量子電気力学のくりこみ理論が，なんとなく危ういにもかかわらず，実験を完璧に説明する超精密理論だという例です．ここまでの桁で理論と実験が一致する例は他にはないでしょう．

しかし結局，くりこみ理論はあまり「理論」にはなれませんでした.「くりこみ理論」と呼ぶのは今の時代であって，当時は本気でそう思ってはいませんでした．中でも朝永は，むしろとても冷静な見方をしていました．はっきり言えば，くりこみは「処方」であって「理論」ではないと.「くりこみ」という見事な日本語は朝永の命名によるものですが，朝永の著作には，あまりくりこみ「理論」による計算とは書いていません.「自己無撞着引算法」による計算だとこういう結果になるとか,「この方法をくりこみの方法とでもいっておこう」とか非常に覚めた書き方がされています．かなり後の60年代になっても「僕は，旧式な話だが，やはりフィジカルに考えて，裸のものがあってまた着物を着たものがある，そういうふうに考えたい．しかしこれはまあ，エーテルの存在をいつまでも考えようとしているのと案外似ているのかもしれない.」「非常な高エネルギー現象になるとエフェクティブな電荷というのは裸にだんだん近くなる．それがどこまでいくか．とにかく，無限大引く無限大というのは，たしかに数学的にはナンセンスです」[5]．朝永が最初からずっと悩みながらも，くりこみを「フィジカル」に捉えようとしていたことがよくわかります.

「理論」になれなかった一番の理由は，無限大の精妙な引き算ができて，それで有限な答えが得られるのはいいのだけれども，なぜこういう相互作用を自然が選んでいるのかがわからなかったからです．このことがものすごく気持ち悪かったわけです．もしくりこみ不可能な相互作用が少しでもあれば，朝永らのくりこみ理論は成立せず無限大が残ってしまいます．なぜくりこみ可能な相互作用だけがこの世に存在して，くりこみ不可能な相互作用が含まれてないのか？ これがいちばん大きな疑問であり，そのため,「くりこみ」は真の理論が登場するまでの一時しのぎという自己評価になっていました．坂田昌一の言葉を借りるなら「無批判に進むと，くりこみ可能性を原理のように考えるという ･･･ 誤ちをおかす」[6]．その後の現実の

歴史では，くりこみ可能性を原理とする立場で素粒子論の理解が進んだことも事実ですが，最終的には，原理も必ず証明されるべきだという坂田の哲学が実現することになります．

同じころ，実験の方では強い相互作用をする新粒子発見の時代が到来します．50年代は新素粒子の発見のピークで，素粒子の数は年々じゃんじゃん増えていき，素粒子と呼ぶことすらおかしくなっていったわけです．素粒子が系統的に整理されるや，それは必然的に，それらが何かさらに下の階層の構成子からできていることを示唆していました．坂田模型に始まるこの複合模型の流れは，最終的に陽子や中性子，パイ中間子等の粒子がクォークからできていることをつきとめることになります．

理論的な側面では，直接に場の理論には関わらずに素粒子の散乱の情報だけで理論を組み立てようという方向，あるいは非局所場の理論，が研究の方向になりました．普通の場は局所的に定義されている4次元時空1点の関数ですが，時空の各点に自由度をおくためにいろいろ悪いことを引き起こす，と考えられます．というのは，ループグラフの計算で発散が出てくる理由は，理論が局所場から構成されているからです．局所場だから無限のミクロ極限まで場の自由度があって，その仮想的状態をすべて積分しなくてはいけないことから発散が出る．だから局所場をやめて非局所場にしようというわけです．これは日本では湯川を中心にして精力的に追究されましたが，結局うまくいきませんでした．ある意味で現在の素粒子のひも理論というのは，非局所場の理論の非局所の度合いが高まって転生したものと見ることもできます．

結局，くりこみの解析は逆に場の理論の信頼を失わせ，場の理論にとっては冬の時代に入っていきます．

3° 冬のモスクワ：ランダウは幽霊を見た

しかし昔からモスクワの冬は寒いので，この冬の時代にも，ロシアのランダウのグループは場の理論の研究を進めていました．ロシアの人々はすさまじい量の計算をもくもくと何年もかけて完成させるのが得意でした．こういう大河のような仕事を評価できるというのは非常に大切なことで，逆に最近の効率最優先の考え方は，基礎学問の衰退の効率だけを高めているような気がします．

彼らが成し遂げたことは今の言葉で言うと摂動級数の足し上げです．量子電気力学のあらゆる計算は，図1にある電荷 e，つまり相互作用の大きさ（結合定数）で展開する形で行われます．e は小さいので最初の何項かで実験と合わせられると期待します．これを摂動論による計算と呼びます．普通に計算すると，対象の物理現象のエネルギーを E として

$$1 + e^2 \log\left(\frac{E}{mc^2}\right) + e^4 \left\{\log\left(\frac{E}{mc^2}\right)\right\}^2 + \cdots \tag{7}$$

というように補正が現れます．すると，こういう摂動計算がよい領域というのは，結合定数の e^2 が小さいというだけでは不十分で，$e^2 \log(E/mc^2)$ が小さい，ということが必要に思えます．そして E の大きい所では，全然摂動論が使えなくなってしまいます．そこで，次のような項の足し上げ，

$$\sum_{n=1}^{\infty} \left\{e^2 \log\left(\frac{E}{mc^2}\right)\right\}^n$$

を先にやってしまおう，というわけです．これができれば残った項は相対的に e^2 だけ小さくなり，摂動性が改善されます．ランダウらはグラフの構造を分析して，結局，図7のループグラフだけでこの足し上げが評価できることを示しました．このグラフは真空偏極と呼ばれます．光子が走って来て，電子と陽電子を対生成し，それが対消滅して光子に戻る，という純粋に量子力学的過程です．

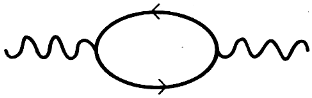


図 7　いちばん効くグラフ

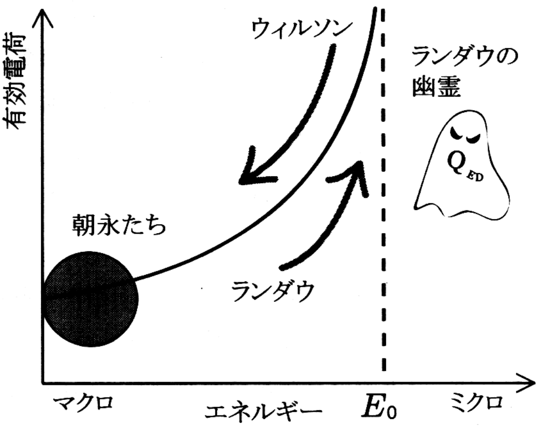


図 8　有効電荷のエネルギー依存性

それを足し上げてみると結局，電荷 e が実はエネルギーに依存しているとみなすとうまく理解できることが明らかになりました．こういう電荷 e のような基本定数がエネルギーに依存していると考えることは，新しい大きな一歩でした．図 8 に結果を書きます．

縦軸はエネルギーに依存する有効電荷 $e_{\text{eff}}(E)$，横軸はエネルギーです．エネルギーが小さいマクロの極限では，

$$\lim_{E\to 0}\frac{e_{\text{eff}}(E)^2}{4\pi\hbar c}=\frac{1}{137}$$

で，マックスウェルの電磁気学はそこでやっているわけです．朝永たちがやっていたくりこみ計算は丸で囲んだ辺り，$e_{\text{eff}}(E)$ が小さい低エネルギー領域で，予言を摂動論の最初の方の項で調べていたわけです．

ランダウはそれを一気に進めて，エネルギーが大きい領域でも予言がで

きるように無限級数の足し上げをしました．その結果が

$$e_{\mathrm{eff}}(E)^2 = \frac{e^2}{1 - \dfrac{e^2}{6\pi^2\hbar c}\log\dfrac{E}{mc^2}}$$

です．エネルギーをどんどん上げていくと有効電荷 $e_{\mathrm{eff}}(E)$ がどんどん大きくなり，さらに有限のエネルギー $E_0 = mc^2\exp(\frac{6\pi^2\hbar c}{e^2})$ で発散してしまいます．エネルギーの高い物理現象とはミクロの物理現象に他なりません．これは当時ランダウの幽霊とも呼ばれました．というのは，ある見方ではこの限界より先のミクロ領域では確率が負になるような状態（幽霊状態と呼ぶ）が出現してしまうからです．

元々の理論は局所場で定義されているので，理論にはエネルギーが無限大のミクロの極限まで含まれているはずです．しかしランダウの得た結果は，あるエネルギー E_0 以上では有効電荷が発散し，この理論では記述できないことを示してしまい，量子電気力学には矛盾があることになります．山口嘉夫によれば，ファインマンやダイソンらの美しい摂動論の展開に先を越されたと悔しがったランダウが，彼らの理論に矛盾を見つけてやろうと必死にやった研究だとのことですが，動機はともかく，ランダウらの発見は冬の時代の場の理論にさらに追い討ちをかけることになりました．

4° ウィルソンは天上から眺めた

ウィルソンはこの状況を逆転して捉えます．ランダウは図8を左下から右上へと見ていたわけですが，ウィルソンは逆に右上から左下へと見るわけです．すなわち，理論は本来ミクロで定義されているわけですから，ミクロでどういう理論を定義したらマクロにどういう物理が出てくるか，と考えるわけです．だから E_0 で $e_{\mathrm{eff}}(E)$ が発散するからといって幽霊が出てくる必要は全然ないわけで，そんな理論はもともとないわけです．これが

ウィルソンの逆転の発想だったわけです．ランダウの幽霊をウィルソン流に現代的に言うと，ミクロの出発点を無限小のミクロにするとマクロで観測される有効電荷がゼロになってしまい，電子は光子と相互作用できなくなる，という「自明性問題」になります．

しかしランダウもそれほど慌てていたわけではありません．「それは現存する量子電気力学に起こりうる内的非一貫性を十分に示している．と同時に，量子電気力学では上記の困難はただ純理論的価値しかもちえないことを強調しておく必要がある．それは，何ら現実的重要性を持たない空想的巨大エネルギー $\sim mc^2 \exp(\frac{6\pi^2\hbar c}{e^2})$ (電子質量エネルギーの 10^{280} 倍) の時に生じる．実際には，とうのむかしに電磁的相互作用は，強い相互作用と絡まり，その結果電気力学はその意味を失ってしまうことを期待してよい」[7].

これが本当に40年も前の理解とは思えませんね．これは本質的に正しくて，現代の我々は量子電気力学が 10^{11} 電子ボルトあたり（電子の質量エネルギーの 10^5 倍程度）で急に強くなる「弱い相互作用」とからまってワインバーグ・サラムの統一理論になることを知っています．そして，有効電荷のさらにミクロでの振る舞いも当然変わっていきます．ただ「量子電気力学が強くなる前に,「強い相互作用」がさっさと弱くなり,「弱い相互作用」が急に強くなる」とはさすがのランダウも気づかなかったようですね．

ウィルソンはミクロで理論がどうなっているかということが先にあって，その結果としてマクロの理論が出てくるという順序で考えました．この方向性の根拠は何でしょう．なぜ我々はミクロの理論から出発するのでしょうか？　それは相対性理論との整合性です．理論は相対論と矛盾しないように作る必要がありますが，マクロの理論でそれをするのは大変です．ミクロの理論で局所的な相互作用を書けば自動的に相対論の要求を満たすことができます．それから出てくるマクロの理論は全然局所的ではありませんが，それでも自動的に相対論には矛盾しません．

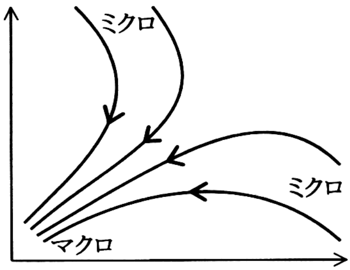


図9　相互作用空間

ミクロの相互作用はどうとるべきなのでしょう．それは一般的であるべきです．くりこみ可能かどうかなんてことで決めるべきことではありません．すると必要な対称性や相対性理論の要求から許される相互作用はすべて入れて，すべてを同時に考えることになります．これらすべての相互作用の自由度を表すのが「相互作用空間」（図9）です．すべての可能な相互作用の大きさを決めれば，この空間の中の1点に対応します．図では，その中の2次元分の座標（相互作用）だけを書いています．

ミクロで相互作用を決めると，この空間の1点が対応し，そこからマクロに向かって徐々にエネルギーを下げていくと，すべての相互作用の大きさが徐々に変化していきます．この変化の様子は，相互作用空間の中の一つの線で表されます．これを流れ（フロー）と言います．この流れを制御する方程式を一般にくりこみ群方程式と呼びます．いろいろな出発点をとればいろいろな流れができますから，相互作用空間は流れで覆い尽くされます．流れの大域的な構造を解析することから理論研究を始めるわけです．

ミクロからマクロに向かっての流れには大きな特徴があります．ミクロで無限の可能性を持つ相互作用たちの中で，ほとんどの相互作用はマクロに向かって収縮してしまいます．そしてほんの一部の相互作用だけがマクロに向かって成長します．この成長する相互作用が，ある条件の下では，くりこみ可能な相互作用として分類されていた相互作用とぴったり一致する

のです．すなわち，ミクロの相互作用を何にとっても，マクロの相互作用は「くりこみ可能な相互作用」と区別がつかない，ということがこのウィルソンの方法で証明されたことになります．

我々が実験事実として知っている「くりこみ可能性」ということ自身がマクロで自動的に実現する性質だったのです．これで，朝永の悩みも解決，坂田哲学の勝利です．裸がちゃんと着物を着て，くりこみは遂に「フィジカル」に理解されたのです．

ウィルソンはくりこみを2回目の勝利に導き，これにより我々は70年代にくりこみ理論に対する評価をガラリと変えたわけです．朝永たちの発明による1回目の勝利だけでは「理論」になれなかったのですが，今や「くりこみ」は場の理論の非常に大切で物理的な構造を切り出す基本手法であることが誰の目にも明らかになったのです．

こうなれば，理論家はもともと傲慢です．「くりこみ理論」をどんどん適用し，少し昔なら考えられないようなこと，実験でわかっている領域から10^{20}倍もミクロの領域の予言を堂々と始めました．その遠くを見るための方法，つまりエネルギーを上げてミクロにいったときに，相互作用がどうなるかを予言する手段を与えたのが「くりこみ群」です．この意味で，田中正の言葉を借りれば，まさに「くりこみ群は千里眼」となったのです．

5° 古典物理学の常識

ここからは高校生にくりこみをどう教えるかを考えて作った話です．数年前に大先生方を前に堂々と話してしまったことがあって，それでも興味を持っていただけたので，新鮮な見方かもしれません．朝永以来のくりこみ理論をがっちりと勉強していると，逆に，いまから言うようなグローバルな見方とか，くりこみ群から始めるくりこみ理論というのはちょっととっ

つきにくい．でも，これからの人はそれを常識にして育っていくのでしょう．だから私は現代くりこみ理論という言い方で区別しています．

いまからいくつかの「理論の箱」を考えます．物理の理論というのは非常に一般的に考えますと，とにかく理論があって，その理論がパラメータを含んでいて，それから何かを計算し，理論的予言をするものです．それを実験と比べてどうなのかでその理論が合っているかとか，パラメータがいくらだとか，議論するわけです．

まずニュートン力学，しかも単なる自由落下の理論を考えましょう．古典力学には質量 m の粒子が従う運動方程式があります．

$$m\frac{d^2x}{dt^2} = F \tag{8}$$

自由落下の理論というのは力 F が重力 mg の場合です．落下距離 x は

$$x(t) = \frac{g}{2}t^2 \tag{9}$$

と出力されます．これを古典力学の箱（図10）と定義します．

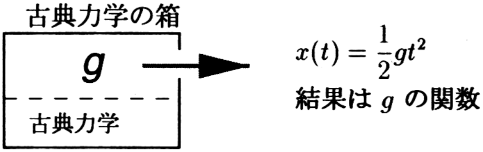


図10　古典力学の箱

これは g というパラメータを持っている理論で，理論の出力は g の関数として求まります．g はパラメータですから，たとえば1秒後の落下距離を測って，g がわかります．これで任意の時刻の落下距離が完全に予言できます．

$$x(1) = \frac{g}{2} \Longrightarrow x(t) = x(1)\cdot t^2 \tag{10}$$

もう一つ強調しておきたいのは次元解析です．x は長さの次元 $[x] = [L]$，g というのは加速度ですから $[g] = [L/T^2]$ です．落下距離 $x(t)$ を g と t の

関数で書くには，g に t^2 を掛けるしかありません．

$$x \sim gt^2 \tag{11}$$

もちろんこの比例係数が $\dfrac{1}{2}$ であるとするには別に理論が要ります．

6° 無限大に翻弄される場の理論

次は場の理論です．場の理論で自由落下の落下距離というわけにはいかないので，エネルギーが E のときに何かある反応の起こる確率 $\lambda(E)$ を考えましょう．これを適当に計算します．すると

$$\lambda(E) = \frac{g^2}{1 - g^2 \displaystyle\int_E^\infty \frac{dx}{x}} \tag{12}$$

という式が典型的に出てきます．これは実はランダウたちがやったように，結合定数 g による摂動級数の足し上げをやった式を書いています．ここで後のために式（12）の分母分子を g^2 で割っておきます．

$$\lambda(E) = \left(\frac{1}{g^2} - \int_E^\infty \frac{dx}{x}\right)^{-1} = \left(\frac{1}{g^2} - \log\frac{\infty}{E}\right)^{-1} \tag{13}$$

場の量子論というのは図 11 のように出力します．これを無限大の箱と名づけます．

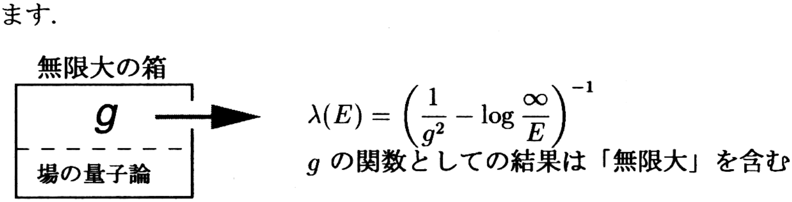


図 11　無限大の箱

この理論は g という結合定数を内に含んで定義されているのですが，それから計算される反応確率は（12）のように無限大を含んでいます．量子

電気力学で計算したら無限大が出てくると言っていたのはこれです．局所場の理論ですからどんな無限大のエネルギーの状態（どんな高振動数の状態）も存在しています．量子力学ですからすべての中間仮想状態を足し上げる必要があります．この二つの事情から $1/x$ の，x は何かエネルギーの次元を持つものですが，∞ までの積分というものが必ず含まれ，対数発散が現れます．だからこの発散というものは場の量子論に特有のものであって，すなわち局所場の理論であるということと量子力学であるということ，その二つのことが原因であり，そう簡単になくすことはできません．

もちろん朝永たちはこの無限大を見てあきらめたわけではなくて，くりこみを発明しました．ここで少し朝永たちのくりこみを実行してみましょう．朝永たちは摂動論で 1-ループまでを計算しましたので，式（12）の $\lambda(E)$ を g で展開します．

$$\lambda(E) = g^2\ [\text{ツリー近似}] + \ g^4 \log\left(\frac{\infty}{E}\right)\ [\text{1-ループ近似}]\ +\ \cdots \tag{14}$$

展開していくと結合定数の無限次まで出てきます．左辺が観測量である確率で，右辺の g が裸の結合定数です．ツリー近似では g^2 となっていて発散はありませんから，この反応確率を何か測定できる結合定数の2乗に対応させます．これを g_{R}^2 と書きます．g_{R} はくりこまれた g という意味です．したがってツリー近似では，結局，

$$\lambda(E) = g_{\mathrm{R}}^2\ , \qquad g^2 = g_{\mathrm{R}}^2 \tag{15}$$

だけのことで，何の問題もありません．

続いて 1-ループの補正項を計算しますと，発散に出合います．そこで今度は，裸の結合定数はどうせ直接観測できないので，えいっと，

$$g^2 = g_{\mathrm{R}}^2 - g_{\mathrm{R}}^4 \log\left(\frac{\infty}{\mu}\right) \tag{16}$$

となっているのだとします．ここで対数の中の次元を消すために μ というエネルギー次元を持った定数を使わざるを得ませんでした．ここに E を入

れるわけにはいきません．裸の結合定数はエネルギーの関数ではないからです．この定義を式（14）に入れましょう．いまは結合定数の6乗以上は考えないので，

$$\begin{aligned}\lambda(E) &= g_{\mathrm{R}}^2 + g_{\mathrm{R}}^4 \log\left(\frac{\infty}{E}\right) - g_{\mathrm{R}}^4 \log\left(\frac{\infty}{\mu}\right) \\ &= g_{\mathrm{R}}^2 + g_{\mathrm{R}}^4 \log\left(\frac{\mu}{E}\right) \qquad (17)\end{aligned}$$

となります．結合定数の4次の項にあった無限大はちゃんとキャンセルして，代わりに μ が現れました．

これが朝永たちの摂動論くりこみの基本パターンです．g というのは理論を定義しているパラメータですが，裸の結合定数で直接観測できないので，式（16）のような発散を含んでいてもよい．こう仮定してしまえば，物理量である反応確率 $\lambda(E)$ は式（17）のように摂動展開で計算され，その答えは全く有限な関数です．くりこまれた結合定数 g_{R} に有限な観測値を入れるかぎり，結果は完全に有限です．

朝永たちの時代にはそこまではやってないのですが，式（13）の足し上げた表現でくりこみを見ましょう．この中の ∞ をキャンセルしてやろうと考えましょう．裸の部分 $1/g^2$ が $\log\infty$ を含んでいればいいですね．何か $1/g^2$ が $\log\infty$ 的になっているなら，$\log\infty$ 同士がキャンセルして有限な関数になるわけです．朝永たちのやり方（17）は純粋な摂動論でのくりこみ，いま説明した方法は，ランダウの足し上げを実行した上でのくりこみで，くりこみ群の方法と呼ばれる段階のものです．

さてくりこみの結果は有限の答えを与えますが，古典力学の箱と本質的に異なることがあります．それは次元解析です．反応確率というのは本来次元のない量です．これを次元のない g とエネルギー次元の E の関数として書かねばなりません．次元解析をすると $\lambda(E)$ は本来 E に依存するわけがないのです．次元のない量 g と次元のある量 E との関数で次元のない量を作れと言われたら，次元のある量は入って来ようがない．ところが

くりこみをやりますと $\lambda(E)$ というのはちゃんと E に依るような形（17）で求まっています.

この手品の種はもちろん ∞ という発散している量に関係しています. 次元解析というのは当然有限な関数に対してしか定義できないので, 無限大をやりとりしてしまうと, 次元の整合性が自明ではありません. 実際, 最後の結果（17）には, 理論が想定していなかったパラメータ μ が登場して次元を与え, そのおかげでエネルギーに依る確率になりました. この μ のことをくりこみ点と呼びます. いずれにしても何か種は入っているのだけれど, この無限大の箱をうまく処理したくりこみというのは, 古典力学の箱の単純な論理構造を越えています. これを正準な次元解析を壊しているとも言いますが, そういう所に踏み込んでいるということがわかります.

急に登場したくりこみ点 μ の意味は何でしょう.「くりこみ条件」と呼ばれる概念の一部です. 先ほどの裸の結合定数の定義式（16）を見てください. ここに μ を持ち込まざるを得ず, それが最後の結果の μ に引き継がれました. 大事なことは, μ は有限な値であれば何でもよかった, ということです. μ というエネルギーの物理的意味を理解するには, 最後の結果（17）で $E=\mu$ としてみましょう. そのとき, この確率はちょうど g_{R}^2 になります. μ を変更すれば, 定義（16）より g_{R} が異なることになり, それはちょうど

$$\lambda(\mu) = g_{\mathrm{R}}^2 \tag{18}$$

という対応を持っているわけです. μ は, くりこまれた結合定数をどう取るかという自由度を制御しています. そして同時に, エネルギーが μ のときに確率は g_{R}^2 だ, という条件を課しているわけです. これを一般にくりこみ条件と呼びます. また, この時点で, 観測量という概念とくりこまれた結合定数という概念は同じものということもわかります.

古典力学の箱の自由落下と比べましょう. どちらの理論も一つのパラメー

タ g を持っています．自由落下のときは1秒後の x を見て，パラメータを決めて，それ以外のすべての時間での距離を予言できた．いまも同じです．エネルギーが μ の所で我々はある反応確率を測定します．そのことによって裸の g を決めます．それを決めると残りの全エネルギーでの予言ができる．ただし途中で決められた裸の g は古典力学の箱のときと違ってまともなものではない．それだけの，しかし大きな違いです．

ここでほんの少しだけど，大きな意味のある飛躍をします．基本論理は，あるエネルギーの所での測定を入力として裸のパラメータを決めて，そして別のエネルギーでの予言をする，でした．あるエネルギーで決めて別のエネルギーを見る．その途中の，裸のところが何かいやらしい．裸の結合定数を決めるときに，無限大が見えてしまう．実はその途中は見なくていいんじゃないかと気づきませんか．

あるエネルギーの所で $\lambda(E)$ を知っているのでそれで裸の g が決まる．それから他のエネルギーの物理を予言する．これは2ステップ論理です．古典力学の箱では何も問題ありません．しかし場の理論では真ん中の裸のところが危ないわけです．つまりあるエネルギーの所と別のエネルギーの所で $\lambda(E)$ がどう動くかだけを見ればいいのです．これは1ステップ論理です．これで十分でしょう．だから真ん中の裸を省略すればいい．あるエネルギーでこうだったら別のエネルギーでどうなのか．単なる1ステップ論理だけを考えればよいのです．

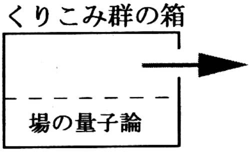
この1ステップ論理を抽象的に捉えましょう．エネルギーによってどう変わるかということを数学的に記述するには微分を見ればいいわけですから，$\lambda(E)$ ではなくて，これのエネルギー微分を最初から見ましょう．

$$\lambda(E) \Longrightarrow \frac{\partial}{\partial E}\lambda(E) \tag{19}$$

こういうふうに発想が変えられるのです．もちろんこういう発想になるのに何十年もかかったことも事実です．そしてこれが3番目の箱です．

7° 真打登場：くりこみ群

いよいよ真打の登場です．3番目の箱（図12）はくりこみ群と名づけました．名前の「くりこみ」はわかるにしても，「群」って何でしょう．これは，エネルギーを変えたときの変化を見るのに，ある種のスケール変換による応答を見るという定式化ができるので，「変換」すなわち「群」というのが由来です．くりこみ群の箱では，無限大の箱にあった裸の g という概念が消えています．



$$\frac{d}{dE}\lambda(E) = -\frac{1}{E}(\lambda(E))^2$$

エネルギー微分の結果は
g も「無限大」も含まない

図12　くりこみ群の箱

エネルギー微分を求めるため式（12）を微分します．まず，$1/\lambda$ を微分すると速いです．

$$\frac{d}{dE}\left(\frac{1}{\lambda}\right) = \frac{1}{E} \Longrightarrow \frac{d}{dE}\lambda = -\frac{1}{E}(\lambda(E))^2 \tag{20}$$

これが確率あるいはくりこまれた結合定数のエネルギー依存性です．先に用語を出してしまうとくりこみ群方程式と呼ばれるものです．ここで重要なことはこの方程式には何の危なさもないわけです．∞ という記号は微分したときに消えました．それからもう一つ，これは次元解析を満たしています．先ほどは $\lambda(E)$ を g と E で表そうとしたので次元解析が危うくなりました．式（20）を見ますと，左辺は次元のないものをエネルギーで微分していますからエネルギーの逆数の次元です．右辺も同じ次元です．つまりこの式は次元解析をちゃんと満たしています．

これは微分方程式ですから，解を求める必要があります．積分すると

$$\lambda(E) = (\log E + C)^{-1} \tag{21}$$

となります．積分定数 C は，この解に何らかの「初期」条件を与えて決める必要があります．たとえば条件として「E_0 というエネルギーのときに $\lambda = \lambda_0$ である」としましょう．この条件を入れますと

$$\lambda(E_0) = \lambda_0 \Longrightarrow \lambda(E) = \left(\log\left(\frac{E}{E_0}\right) + \frac{1}{\lambda_0} \right)^{-1} \tag{22}$$

となります．ここで微分方程式の解を決めるための初期条件と呼んでいるものは，前節の無限大の箱をくりこむときにはくりこみ条件と呼んでいたものにちょうど対応しています．どうしても一つ条件を定めないと解が決まらないということは，この理論がパラメータを一つ持った理論であることに起因していると，とりあえずしておきましょう．(後でこの理解は否定，というか止揚されます.)

さてこれがくりこみ群の箱の出力です．くりこみ群方程式という無限大のない方程式を出力し，我々はその微分方程式を積分することによっていろいろな結果を得るわけです．そのときに初期条件は別に必要です．式 (13) の無限大の箱の答えを見てください．この無限大の箱の出力とこの微分方程式の出力，積分結果を比べてほしいのです．式 (13) の $1/g^2$ と式 (22) の $1/\lambda_0$ が対応していて，式 (13) の ∞ と書いてある所が式 (22) の E_0 に対応しています．このことが非常に深い意味を持っているわけです．すなわち，無限大の箱の出力というのは，くりこみ群の箱から見たらどういうことだったのか．くりこみ群の箱の出力は E_0 のエネルギーのときに λ_0 だという初期条件の解です．ということはいまの２式を比べると，∞ のエネルギーのときに λ_0 すなわち g^2 という境界条件を満たすもの，そういうものが無限大の箱の出力だったということがわかります．

ここがこの講義でいちばん重要なところです．無限大の箱の出力というのは $E = \infty$ のときに $\lambda_0 = g^2$ の境界条件の解に対応している．これは全く自然です．なぜなら g^2 というのは我々の理論の裸の結合定数でした．それは局所場どうしの結合を決めています．すなわち $E = \infty$，無限小のミク

ロでの場の結合を表しています．だからこそちょうどエネルギーが ∞ のときに λ_0 が g^2 であるという解を与えていたわけです．

くりこみ群の出力というのは無限大の一切ない微分方程式を与えていました．それに対して有限のエネルギーの所で何とかという条件をおけば，∞ と一切関係なく，有限の解が確定します．無限大の箱の出力というのはその初期条件を与える場所として，エネルギーが ∞ の所で与えようとしていた，そういう無茶を人間が勝手にするから ∞ が結果に登場してくる．有限のエネルギーの所で境界条件を与えて別のエネルギーの所の予言をする，そういう立場に立ってしまえば ∞ は全く登場しない．無限大の原因は人間の側にあり理論の側にはなかったのです．

くりこみ群の解の性質でもう一つ重要なことがあります．いま，別の初期条件を考えましょう．先ほどは E_0 の所で λ_0 としましたけれど，E_1 の所で λ_0 としたらどうなるか．微分方程式の解は

$$\lambda(E_1) = \lambda_0 \Longrightarrow \lambda(E) = \left(\log\left(\frac{E}{E_1}\right) + \frac{1}{\lambda_0}\right)^{-1} \tag{23}$$

解（22）と解（23）の関数形は見た目は違います．しかしここで不思議なことは二つの条件にいったいどれほどの物理的な差があるのかということです．というのも，くりこみ群方程式（20）にはエネルギー次元を持った定数はどこにも入ってないわけです．だからエネルギーを測る単位の情報は何も入っていません．何も入ってないから E_1 のときとか E_0 のときとかと言われてもその差は本当はありません．そのことを見るために，解（23）で E という変数をスケールします．

$$E \to \frac{E_1}{E_0} E \tag{24}$$

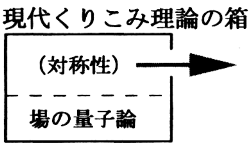
すると，解（22）と全く同じになります．ということは，二つの解の $\lambda(E)$ は実はエネルギーを測る尺度の違いにすぎなかったということになります．これは物理の差ではありませんから，同じ物理だということです．

この微分方程式にはエネルギー次元を持った定数がないので，スケール不変性があります．つまり $\lambda(E)$ が解なら $\lambda(kE)$ も解です．これは簡単なことですが，物理としては非常に重要なことを言っています．なぜなら上でせっかく違う初期条件を取ったのにそれはエネルギーの尺度の違いだけだったということになってしまったのです．このくりこみ群方程式で記述される系は，もともと g という1パラメータ自由度を持っている，それに対応して初期条件の自由度がある，と思っていたわけですが，その自由度はエネルギー尺度の違いに吸収されてなくなりました．したがって，物理は一つということになります．自由度は事実上消えました．物理として「g の違う理論」という概念はないのです．物理には g に対応する自由度がありません．

この事実は一般的に成立します．場の理論のくりこみ理論では，結合定数一つ分の自由度は常にエネルギー尺度の自由度に食われてしまう．たとえば強い相互作用の理論である量子色力学では，クォークの質量を考えなければ裸の結合定数 g の自由度が一つあるのですが，それによって違う物理は現れない．くりこみ理論で計算するとき，くりこみ条件というものを考えるわけですが，たとえば1 GeVでくりこまれた結合定数が1であるとかします．しかし量子色力学にはエネルギー次元を持った定数は一つも入っていないので1 GeVとか言われても困るわけです．だからこれは1 GeVで1だというくりこみ条件をおいたのではなくて，むしろ無次元の結合定数が1になるエネルギーを我々は1 GeVという名前で呼ぶと定義した，と言い変えるべきなのです．そうするといろいろなくりこみ条件に対応して，いろいろな物理が出てくるということがないことはもはや自明ですね．

8°　現代くりこみ理論

最後の四つ目の箱は現代くりこみ理論の箱（図13）です．ウィルソンがミクロから理論を眺めたとき，相互作用を限る必然性はありませんでした．むしろそうしてこそ，広い理論の集合全体についての性質をつかむことができて，初めてくりこみ理論の本質に迫ることができたわけです．したがって，くりこみ群の箱を拡張して，一気にあらゆる相互作用の結合定数についての，エネルギー微分を出力するのが現代くりこみ理論の箱です．もちろん，出力される微分方程式には何の危うさもありません．



$$\frac{d}{dE}\vec{\lambda}(E)=\vec{\beta}(\vec{\lambda}(E))$$

くりこみ流れ図が理論の集合を記述する

図13　現代くりこみ理論の箱

現代くりこみ理論の箱に至っては何か基本相互作用を決めて計算するのではなく，ある対称性を持ったすべての場の量子論を考えます．つまり，その対称性を満たすすべての相互作用を同時に考慮します．すべての相互作用を表すために，図13では λ をベクトルで書きました．そのベクトルがエネルギーに応じてどう変わっていくかが出力されるわけです．

くりこみ群の箱のときには，別に計算されたエネルギーに依存して無限大も含む式（12）を微分して微分方程式を出力しましたが，もちろんそんなステップを踏まなければならないのなら，無限大とは縁が切れません．ここで証明はしませんが，くりこまれた結合定数たちの微分を決める図13の右辺の関数 β は，$\vec{\lambda}(E)$ だけの関数として直接求めることができます．これを一般にベータ関数と呼びます．するとこの微分方程式の解は，どこかのミクロのエネルギーで初期値 $\vec{\lambda}$ を決めれば，解いていくことができます．解は，図9で導入したすべての相互作用の大きさを座標軸とする相互作用

空間の中での一つの線（流れ）となります．初期値を変えれば流れが相互作用空間を埋めていきますが，流れが交わることはあり得ません．なぜなら，ある点から出発する流れは一意的だからです．

現代くりこみ理論は，まずくりこみ群方程式を求め，これの流れを計算して流れ図を作ります．流れ図の中には，固定点，臨界面，などの構造が階層的に発生し，それを解析することによって，この相互作用空間で記述される理論全体の大域的な特徴を明らかにします．相互作用空間では，原理的にはあらゆる物理量が表現されているので，対称性の自発的破れや，相転移などの現象を調べることもできます．

現代くりこみ理論の最大の特徴は，摂動論に全く依拠しないことです．朝永たちが建設したくりこみ理論はあくまで摂動計算を進めるときにどう無限大を処理するのか，という枠内の話でした．その後のランダウによる摂動級数の足し上げ，それに続く摂動論的なくりこみ群の理論においても，あくまで摂動級数が背景にあります．しかし，ウィルソンに至って，あらゆる相互作用の空間が用意され，そこでのくりこみ群方程式のベータ関数を非摂動的に計算する方法が発明されました．それに基づく方法は，非摂動くりこみ群と呼ばれています．

ウィルソンは量子系の研究におけるくりこみ群を，ニュートンが古典力学を構成するときに不可欠の要素であった微分法になぞらえています [2]．非摂動くりこみ群は，いろいろな量子系，場の理論，統計系などで，非摂動現象の解析に成果を上げています．そこで得られる新しい概念，論理，手法，数値計算法は，「くりこみ群」という汎用で強力な解析手法をさらに豊かにして，場の理論に限らず，また物理学に限らず，多くの分野に刺激を与え続け，遂には微分法に匹敵する科学の必須の手法に成長していくでしょう．

参考文献

[1] この講義の続きとして読める非摂動くりこみ群のやさしいレビューとして，
K-I. Aoki, *Int. J. Mod. Phys.* B **14** (2000), 1249–1326.
日本語の解説記事としては，
青木健一，別冊数理科学『場の理論』(1999), 125–133,
青木健一，別冊数理科学『場の物理と数理 —素粒子から物性まで—』(1991), 118–123.
数理科学 **406** (1997-4)『くりこみ群の地平』.

[2] ウィルソンによる含蓄のあるレビューは必読です.
K.G.Wilson, *Rev. Mod. Phys.* **47** (1975), 773–840.

[3] 朝永振一郎・木庭二郎，「量子電磁力学の発展」,『物理学の方向』，三一書房，1949.

[4] 井上 健・高木修二・片山泰久，「素粒子論における発散の問題」,『素粒子論』，共立出版，1951.

[5] 朝永振一郎・坂田昌一・中村誠太郎，「これからの方向について II」,『素粒子の本質』，岩波書店，1963.

[6] 湯川秀樹・坂田昌一・武谷三男・小川修三・藤本陽一,「戦後の発展を語る」,『素粒子の探求』，勁草書房，1965.

[7] イェ・リフシッツ，エリ・ピタエフスキー，(井上健男訳)，ランダウ＝リフシッツ理論物理学教程『相対論的量子力学２』，東京図書，1972 (原著 1969).

[8] 本講義の一部は，
青木健一，「非摂動くりこみ群」(1996 原子核三者若手夏の学校講義録：鈴木俊哉，四辻健治，中川祐輔，佐々木 徹，五十川 正統)
の導入部分を参考にした．また，くりこみ群に関する共同研究者，特に寺尾治彦，住淳一，相馬 亘，森川慶一，友寄全志，堀越篤史との議論に感謝する．

繰り込み群解析

渡辺　浩

1° はじめに

ニュートン力学やマクスウェル電磁気学などの“古典的な”物理法則においては，現在から未来を完全に予測することができます．これを **因果律** といいますが，数学的には，「微分方程式の初期値問題がただ一つの解をもつ」という命題として表現されます．つまり，この世界観においては，現在の宇宙全体についての完全な情報を手に入れれば，人間は神の視座に立ち得るわけです．この言い方が不適切なら，古典物理学が描く世界は，因果律の網の目にがんじがらめにされた，窮屈窮まりない世界であり，我々の“現実感覚”からかなりかけ離れたものであると言い直しましょう．実際，このような自然科学の“不合理”を，決定論と確率論のパラドックスとして内包する形で，統計力学と量子論が始まります．

統計力学 とは，原子や分子などの微視的な粒子が多数集まって，巨視的なスケールにおいて引き起こす現象を理解するための理論であり，微視的な法則をもとに巨視的な現象を説明することを目的とします．しかし，厳密に因果律を満たす微視的な理論から，因果律を破る巨視的な現象を導くという問題はたいへん難しく[1]，まず最初になされたのは，**熱平衡** と呼ばれる状態を記述することでした．

熱平衡というのは，部屋の空気と同温度になったコーヒーのように，系の温度が外界の温度と等しくなって，これ以上変化しない状態，すなわち，

[1] 現在でも未解決です．

巨視的には何事もない静寂のように見える状態を指します．しかし，微視的には目まぐるしい分子運動や，外界とのエネルギーのやり取りなどが起きており，系の微視的な状態が今どうなっているかは，確率的に与えられると考えます．具体的には，系が微視的状態 φ にある確率は，$\exp(-\frac{H(\varphi)}{kT})$ に比例するとされます．ただし，$H(\varphi)$ は，系が状態 φ にあるときの系のエネルギーであり，k はボルツマン定数，T は系と外界の温度です．したがって，系の微視的状態 φ の関数である物理量 $f(\varphi)$ を測定した値は，上記の確率に関する期待値

$$\frac{\displaystyle\sum_{\varphi} f(\varphi) \exp\left(-\frac{H(\varphi)}{kT}\right)}{\displaystyle\sum_{\varphi} \exp\left(-\frac{H(\varphi)}{kT}\right)} \tag{1.1}$$

で与えられることになります[2]．

ここで，粒子の数が極めて多く，たとえば 6×10^{23} 個ほどもある場合，粒子数を無限大にする極限をとることにより，巨大な集団の際だった性質を引き出すことができます．巨大な系には，**相転移** と呼ばれる特徴的な現象があり，数学的には，自由度が無限大の極限において，物理量が特異性をもつ現象として捉えられます．磁性体がある温度で永久磁石になったり，逆にその性質を失ったりする現象は相転移の一例です．相転移を起こすことは，無限自由度をもつモデルの数学的な分析を困難にしますが，同時に，たいへん興味深いものにしています．

一方，**量子論** は，素粒子などの微視的粒子が従う物理的原理であり，特に，粒子の生成消滅を伴わず粒子数が一定である系の運動法則を**量子力学**といいます．量子力学の基本的な自由度は波動関数と呼ばれる複素数値関数 $\varphi(x)$ で記述されますが，$|\varphi(x)|^2$ が粒子の存在確率密度を与えるという

---

[2] φ に関する和が，有限和か無限和か，また積分にすべきか，ということは気にしないことにします．

確率解釈が導入され，量子力学の予言は，本質的に確率的であることが認識されました．

さらに，粒子の生成消滅を伴い粒子数が変化する系の物理法則が **場の量子論** です．場の量子論のモデルは，**真空期待値** と呼ばれる量によって特徴づけられますが，この真空期待値は (1.1) とよく似た式で与えられます．これを，ファインマンの経路積分といいます[3]．場の量子論と統計力学には，このような数学的類似性があるので，今日では，場の量子論のモデルを構築するとき，統計力学のモデルを経由する方法がしばしば取られます．

以下において，「統計力学を経由して場の量子論のモデルを構築する」ということの意味を，少し詳しく説明しましょう．特に，統計力学や場の量子論のモデルを分析するための重要な技法である **繰り込み群の方法** を中心にして，現代の数理物理が直面する問題についてお話したいと思います．

2° 繰り込み群の方法

統計力学や場の量子論のモデルを数学的に分析する問題は，しばしば "繰り込み群" に関する問題に帰着されます．ここではまず，簡単な例を用いて，繰り込み群の考え方を説明しましょう．

級数

$$S_N = \frac{1}{1} + \frac{1}{2} + \frac{1}{3} + \cdots + \frac{1}{N}$$

は $N \to \infty$ で対数的に発散します．その証明法はいろいろありますが，ちょっと変わった方法で示してみます．

まず，等式

$$\frac{1}{2k-1} + \frac{1}{2k} = \frac{1}{k} + \frac{1}{(2k-1)(2k)} \tag{2.1}$$

[3] 量子力学のシュレディンガー方程式の解を，経路積分によって書くこともできます．

に注意します．この式を $k=1,2,\cdots,N$ について加え合わせると

$$S_{2N}=S_N+r_N \tag{2.2}$$

となります．ただし

$$r_N=\sum_{k=1}^{N}\frac{1}{(2k-1)(2k)}$$

であり，N によらない適当な正の定数 α,β により，

$$\alpha<r_N<\beta$$

のように評価されます．したがって，(2.2) から

$$1+\alpha n\le S_{2^n}\le 1+\beta n\,,\quad n=1,2,3,\cdots$$

が得られ，S_N は対数的に発散することが分かります．

さて，上記の計算は，集合 $\mathbb{N}=\{1,2,3,\cdots\}$ のスケール変換と関係づけて考えることができます．

まず，$\mathbb{N}$ から $\mathbb{N}$ への写像 $\mathcal{R}$ を

$$\mathcal{R}(2k-1)=\mathcal{R}(2k)=k\,,\quad k\in\mathbb{N}$$

で定義します．$\mathcal{R}$ は $\mathbb{N}$ を 1/2 倍に縮小する写像であると考えます．これに伴って，数列 $a=(a(n))_{n\in\mathbb{N}}$ への $\mathcal{R}$ の作用を

$$(\mathcal{R}a)(k)=\sum_{j:\mathcal{R}(j)=k}a(j)=a(2k-1)+a(2k)$$

で定めます．すると，

$$S_{2^n}=\sum_{k=1}^{2^n}a(k)=(\mathcal{R}^n a)(1)$$

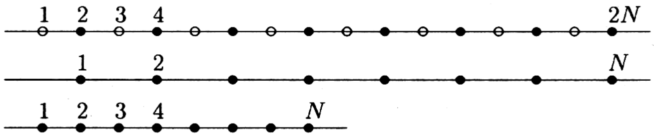


図 1　ℕ 上の繰り込み群変換

が成り立ちます．これは，2^n 個の数を加える計算を，図 1 のように，隣り同士の数を加えながら系を 1/2 倍に縮小するプロセスに分解したことを意味します．このように，自由度を消去しながら系を縮小する変換を，一般に **繰り込み群変換** と呼びます．

さて (2.1) は，$a(k) = 1/k$ が繰り込み群変換 $\mathcal{R}$ の近似的な固定点であることを意味し，

$$\mathcal{R}a = a + r \tag{2.3}$$

のように書けます．ここで，誤差 r は繰り込み群変換の回数によらない評価

$$\alpha < (\mathcal{R}^n r)(1) < \beta$$

をもちます．そして，(2.3) を繰り返し用いると，

$$\mathcal{R}^n a = a + \sum_{k=0}^{n-1} \mathcal{R}^k r$$

となり，$(\mathcal{R}^n a)(1) = \mathcal{O}(n)$ が得られます．

3° 1次元イジングモデル

次に，統計力学の簡単なモデルである1次元イジングモデルを例として，繰り込み群の方法を説明しましょう．

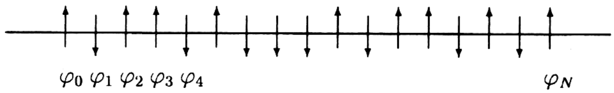


図2　1次元格子

図2のような，長さ N，格子間隔1の1次元格子上に，± 1 の値をとる確率変数 $\varphi_k, k = 0, 1, 2, \cdots, N$，を配置します．物理的には，上向き，下向きの二つの状態をとる小さな磁石を一列に並べたものと考えます．この小さな磁石を **スピン** と呼びます．各スピンが独立に等確率で上下の向きを選ぶとすれば，スピン全体をひとまとめにした確率変数 $\varphi = (\varphi_k)_{k=0,1,2,\cdots,N}$ の分布は，δ 関数を用いて

$$P_{N,0}(\varphi) = \prod_{k=0}^{N} \frac{1}{2}(\delta(\varphi_k - 1) + \delta(\varphi_k + 1)) \tag{3.1}$$

のような直積測度の形に書けます．

● 相互作用

しかしこれでは，スピン同士が相互作用しないのでおもしろくありません．いわゆる強磁性体では，近隣のスピンが同じ方向を向こうとする傾向があります．この **強磁性相互作用** を取り入れるために，φ で表される状態にある系のエネルギーを

$$H_{N,J}(\varphi) = -\sum_{k=0}^{N-1} J\varphi_k\varphi_{k+1} \tag{3.2}$$

とし，φ が従う確率分布を，(1.1) にならって

$$P_{N,J}(\varphi) = \frac{1}{Z} e^{-H_{N,J}(\varphi)} P_{N,0}(\varphi) \tag{3.3}$$

のように定めます[4]．ただし，J は正の定数であり，Z は

$$\int_{\mathbb{R}^{N+1}} P_{N,J}(\varphi) \prod_{k=0}^{N} d\varphi(k) = 1$$

が成り立つようにとります．ここで，J は正ですから，隣接するスピン φ_k, φ_{k+1} の方向がそろった配位はエネルギーが下がり，確率的に有利となります．このようにして定義される確率モデルを，**1 次元イジングモデル** と呼び，系のエネルギーを与える関数 $H_{N,J}(\varphi)$ を **ハミルトニアン** と呼びます．

- **相関関数**

このモデルにおいて，両端のスピン φ_0, φ_N の相関

$$C_N(J) = \int_{\mathbb{R}^{N+1}} \varphi_0 \varphi_N P_{N,J}(\varphi) \prod_{k=0}^{N} d\varphi_k \tag{3.4}$$

を計算しましょう．各スピンは隣り同士で相互作用していますが，スピン φ_0 が上向き $+1$ であるとすると，その情報が "伝言ゲーム" のように伝わって[5]，反対側の φ_N が上向きになりやすいという相関が生じるものと考えられます．

以下，簡単のために，$N = 2^M$ (M は正整数) とします．まず，奇数番目の変数を積分して消去します．そのために，$\varphi_{2k}\varphi_{2k+1} = \pm 1$ のとき

$$e^{J\varphi_{2k}\varphi_{2k+1}} = \cosh J + \sinh J \cdot \varphi_{2k}\varphi_{2k+1} \tag{3.5}$$

[4] (1.1) の逆温度 $\frac{1}{kT}$ は，定数 J に含まれているとみます．
[5] 熱雑音のために伝え間違いが生じることがあります．

が成立することに注意して，$\varphi_{2k+1} = \pm 1$ に関する和（積分）をとると，

$$\sum_{\varphi_{2k+1}=\pm 1} \frac{1}{2} e^{J\varphi_{2k}\varphi_{2k+1}} e^{J\varphi_{2k+1}\varphi_{2k+2}} = (\cosh J)^2 \cdot e^{J'\varphi_{2k}\varphi_{2k+2}}$$

となります．ここに，J' は

$$\tanh J' = (\tanh J)^2$$

で定まる定数です．

そこで，まだ積分されてない偶数番目の確率変数をひとまとめにして，$\varphi' = (\varphi'_k) = (\varphi_{2k})$ と書くと，φ' が従う確率分布は，新しいハミルトニアン

$$H_{N/2,J'}(\varphi) = -\sum_{k=0}^{N/2-1} J'\varphi'_k\varphi'_{k+1}$$

を用いて，

$$P_{N/2,J'}(\varphi') = \frac{1}{Z'} e^{-H_{N/2,J'}(\varphi')} P_{N/2,0}(\varphi')$$

のように表せます．したがって特に，

$$C_N(J) = C_{N/2}(J') \tag{3.6}$$

が成り立ちます．

さて，$N = 2^M$ としたことを思い出して，等式 (3.6) を M 回繰り返し用いると，

$$C_N(J) = C_1(J_N)$$

となります．ただし，J_N は

$$\tanh J_N = (\tanh J)^N$$

で定義されます．そして，$C_1(J_N)$ は，二つのスピン φ_0, φ_1 からなる系の相関関数ですから，(3.5) を用いて計算すると，

$$C_1(J_N) = \frac{\displaystyle\sum_{\varphi_0=\pm 1}\sum_{\varphi_1=\pm 1} \varphi_0\varphi_1 \exp(-J_N\varphi_0\varphi_1)}{\displaystyle\sum_{\varphi_0=\pm 1}\sum_{\varphi_1=\pm 1} \exp(-J_N\varphi_0\varphi_1)} = \tanh J_N = (\tanh J)^N$$

となり，結局

$$C_N(J) = (\tanh J)^N = e^{-mN}, \quad N = 2^M$$

が得られます．ただし，$m = -\log\tanh J$ です．このことから，両端のスピンは正の相関をもち，スピン間の距離が長くなると，相関は指数関数的に減衰することが分かります．

● 繰り込み群変換

ところで，図 3 のように，1 次元格子上の奇数番目の自由度を積分して消去し，その結果として生じた粗い格子を幾何的に 1/2 倍に縮小すると，もとの格子と同じ格子間隔をもつ（長さが半分の）格子が得られます．

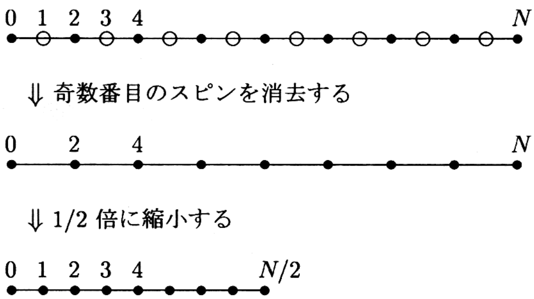


図 3　1 次元イジングモデルの繰り込み群

すなわち，$P_{N,J}$ を $P_{N/2,J'}$ に対応させる写像は，自由度を消去しながら，系を縮小する繰り込み群変換であると言えます．この変換が前節の繰り込み群変換 $\mathcal{R}$ に相当し，(3.6) が (2.2) に相当するものであることに，読者は気づいておられることでしょう．

さて，以上の結果に関して，注意をつけ加えます．

まず，φ_0, φ_N は鎖の両端のスピンでしたが，鎖の途中のスピンの相関を調べることもできます．実は，φ_0, φ_N が端点でなく，その外側にスピン φ_k $(k < 0, N < k)$ がいくつ続いていても，φ_0, φ_N の相関は，上で求めた $C_N(J)$ に等しいことが簡単に示せます．

また，$N = 2^M$ の場合に限ってスピン φ_0, φ_N の相関 $C_N(J)$ を調べましたが，それ以外の場合はどうなのかという問題に触れておきます．直観的には，スピンは離れれば離れるほど相関が弱くなると思われます．実際，ある方法を用いると，$C_N(J)$ が N に関して減少することを示すことができます．したがって，相関が指数関数的に減衰するという形の評価

$$\exp(-2mN) < C_N(J) < \exp\Bigl(-\frac{m}{2}N\Bigr) \tag{3.7}$$

がすべての N について成立します．このように，繰り込み群の方法は，それを補佐する別の手段を併用することにより，実用性を高めることができます．

ところで，(3.7) から，たがいに相関し合うスピンは，だいたい距離 $1/m$ の範囲に広がっていることが分かります．この距離を **相関距離** と呼びます．

4° 高次元化

イジングモデルを少し一般化しながら高次元化します．d 次元ユークリッド空間 $\mathbb{R}^d$ の中の格子 $\mathbb{Z}^d$ を考え，その有限部分集合を Λ とします．通常 Λ としては，適当な立方体の内部に属する格子点を集めたものを考えます．さて，Λ の各点 x に，実数値をとるスピン φ_x を配置します．まず各スピンが独立であり，すべて同一の確率分布関数 $h(\varphi_x)$ をもつとすると，$\varphi = (\varphi_x)_{x\in\Lambda}$ の分布関数は，

$$P_{\Lambda,0}(\varphi)d\varphi_\Lambda = \prod_{x\in\Lambda} h(\varphi_x)d\varphi_x \tag{4.1}$$

となります．特に，イジングスピンを考える場合は，

$$h(\varphi_x) = \frac{1}{2}(\delta(\varphi_x - 1) + \delta(\varphi_x + 1)) \tag{4.2}$$

とします．

次に，スピン間の強磁性相互作用を導入するために，$K_{xy} \geq 0$ なる対称行列 $K = (K_{xy})_{x,y\in\Lambda}$ を用いて，ハミルトニアンを

$$H_\Lambda(\varphi) = -\frac{1}{2}(\varphi, K\varphi) = -\frac{1}{2}\sum_{x,y\in\Lambda} K_{xy}\varphi_x\varphi_y \tag{4.3}$$

のように定め，φ が従う確率分布を

$$P_\Lambda(\varphi)d\varphi_\Lambda = \frac{1}{Z}e^{-H_\Lambda(\varphi)}P_{\Lambda,0}(\varphi)d\varphi_\Lambda \tag{4.4}$$

とします．特に，$h(\varphi_x)$ として (4.2) を取った場合，上のようにして定義されるモデルを **d 次元イジングモデル** と呼びます．

以下，$d \geq 2$ とし，K は **最隣接相互作用**

$$K_{xy} = J\delta_{|x-y|,1} \tag{4.5}$$

としておきます．

● **ブロックスピン**

上記のモデルに対して，繰り込み群変換を定義します．まず，格子 Λ を適当なブロックに分けます．ここでは Λ 全体を，一辺 3 の立方体に分割することにします．1 次元イジングモデルの繰り込み群変換をまねるとすれば，各ブロックから代表のスピンを一つずつ選んで，残りのスピンについて和をとる（積分する）ことになりますが，2 次元以上では，このように定義した繰り込み群変換は，うまく解析できません．そこで，ブロック内の平均をとることを考えます．

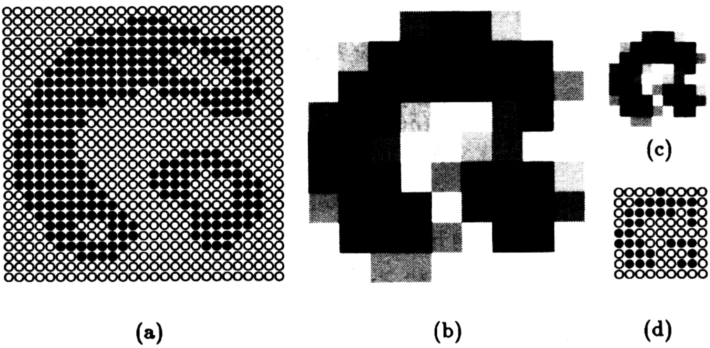


図 4　イジングスピンのブロックスピン変換

図 4(a) は，あるイジングスピンの配位 φ において，スピン φ_x が上向き，すなわち 1 に等しいとき○で表し，下向き，すなわち -1 に等しいとき●で表したものです．そして，

(1)　3×3 のブロックごとに下向きスピンの割合を求め，ハーフトーンで表し (b),

(2)　このパターンを幾何的に 1/3 倍に縮小します (c).

参考のために，さらに (c) のハーフトーンから多数決論理で上下の向きを

決めた図 (d) を付しました．(c) ないし (d) は，もともとの配置 (a) の細かい情報を捨てた縮小像となっています．

さて，(b),(c) を得る手続きは，逐次的に繰り返すことができます．すなわち，図 (c) を 3×3 のブロックに分け，各ブロック内でハーフトーンを平均して新たなハーフトーンを作ると，(b) に相当する図が得られ，さらにその図を 1/3 倍に縮小すれば (c) に相当する図が得られます．(c) における各ハーフトーンを **ブロックスピン** と呼びます．

- **ブロックスピン変換**

いま説明した手続きを，イジングスピンに限定せずに，一般的に定式化してみます．L を 3 以上の奇数，$N\in\mathbb{N}$ として，$\mathbb{R}^d$ の中に立方体 $\mathbf{R}_N = \{x\in\mathbb{R}^d \mid |x_\mu| < L^N/2\}$ を取ります．そして，この立方体の内部の格子点全体を $\Lambda_N = \mathbf{R}_N \cap \mathbb{Z}^d$ とします．

さて，格子 Λ_N を一辺 L のブロックに分けます．Lx, $x\in\Lambda_{N-1}$, を中心とするブロック，すなわち

$$|y_\mu - Lx_\mu| < L/2\ ,\quad \mu = 1, 2, \cdots, d$$

を満たす $y\in\mathbb{Z}^d$ の全体を B_x とします．そして，行列 C を

$$C_{xy} = \begin{cases} L^{-d+\alpha} & (y\in B_x) \\ 0 & (y\notin B_x) \end{cases} \tag{4.6}$$

として，$\varphi' = C\varphi$ によりブロックスピンを定めます[6]．このとき，φ の分布関数を $P(\varphi)$ とすると，φ' の分布関数は，

$$P'(\varphi') = \int \delta(\varphi' - C\varphi)P(\varphi)d\varphi \tag{4.7}$$

[6] $\alpha = 0$ のとき $C\varphi$ はブロック平均となりますが，状況に応じて $\alpha\neq 0$ を取ります．

となります．P を P' に対応させる写像を

$$P' = \mathcal{R}P$$

と書き，**ブロックスピン変換** と呼びます．ブロックスピン変換は，繰り込み群変換の代表的な例です．

さて，$\mathcal{R}$ を繰り返し施すことにより，分布の列

$$P_n = \mathcal{R}^n P \;, \quad n = 0, 1, 2, \cdots, N \tag{4.8}$$

が得られます．P_n は，P を繰り返し縮小しながら，P に含まれている情報のうち微視的な部分を逐次捨て，巨視的な振る舞いに関する情報を残したものです．

5°　場の量子論

いままでイジングモデルなどの統計力学系を考えてきましたが，すべて格子間隔は 1 でした．これから格子の **連続極限**，すなわち，格子間隔 a を 0 に近づける極限を考えます．場の量子論のモデルは，統計力学系の連続極限として得られます．

しかし，場の量子論は場の古典論を "量子化" したものであり，量子論である以上，その理論の中には複素数値をとる確率振幅が現れます．さらに，場の量子論は素粒子の基礎理論として，相対論的な対称性をもつものが重要ですが，統計力学系は相対論的ではありませんから，場の量子論とは直接結びつかないように思われるかも知れません．

そこで，統計力学系の連続極限について考える前に，場の古典論，場の量子論，統計力学の結びつきについて，簡単に説明します．

• 古典論と量子論

マクスウェル電磁気学などの場の古典論は，**作用** と呼ばれる汎関数 $S(\varphi)$

$$S(\varphi) = \int_{\mathbb{R}^4} \mathcal{L}(\varphi(x), \nabla\varphi(x))dx \tag{5.1}$$

によって特徴づけられます．すなわち，変分原理

$$\frac{\delta S(\varphi)}{\delta\varphi} = 0$$

に対応するオイラー方程式として得られる微分方程式が，古典論の運動方程式となります．(5.1) において，$\mathcal{L}$ は場とその微分の関数であり，ラグランジアン密度と呼ばれます．たとえば，古典電磁気学において，作用 S はゲージポテンシャル $A_\mu(x), \mu = 1, 2, 3, 4,$ の汎関数であり，運動方程式は $A_\mu(x)$ に対する偏微分方程式系となります．

さて，場の量子論のモデルは，真空期待値と呼ばれる量によって特徴づけられますが，作用 $S(\varphi)$ をもつ古典論を量子化した理論において，真空期待値は，**ファインマンの経路積分**，すなわち

$$\frac{1}{Z}\exp\left(\frac{i}{\hbar}S(\varphi)\right)d\varphi \tag{5.2}$$

という形の無限次元の複素数値 “測度” に関する積分として形式的に表現されます．ただし，$\hbar$ はプランク定数，Z は

$$Z = \int \exp\left(\frac{i}{\hbar}S(\varphi)\right)d\varphi$$

を満たす “数” です．ここで “体積要素” $d\varphi$ は，

$$d\varphi = \prod_{x\in\mathbb{R}^4} d\varphi(x)$$

とでも書くべきものですが，このままではとうてい数学的な意味はつきません．しかし形式的に停留位相法の考え方に従うと，$\hbar \to 0$ の極限では，

位相 $\dfrac{i}{\hbar}S(\varphi)$ が停留する場の配位，すなわち変分原理

$$\frac{\delta S(\varphi)}{\delta \varphi} = 0$$

で定まる古典場 $\varphi_{古典}$ の周辺に測度が集中すると考えられます．なぜなら，$\varphi_{古典}$ から離れた所では，φ が動いたときに $S(\varphi)$ も動くので，$\hbar$ が小さい状況では位相がたいへん激しく変化して打ち消し合うと考えられるからです．したがって，$\hbar \to 0$ の極限では $\varphi_{古典}$ の周辺に重みが集中する結果として，量子論から古典論が回復するという描像が得られます．

古典論	量子化	**量子論**
$\delta S(\phi) = 0$	$\Longrightarrow$	$\int e^{(i/\hbar)S(\phi)} d\phi$
変分原理		無限次元積分

さて，(5.2) のような“測度”による積分に数学的な定義を与えるにはどうしたらいいでしょうか．

● 量子論と統計力学

“測度” (5.2) による積分には，二つの困難があります．

第一の困難は，それが位相をもつ **振動積分** であり，収束性などの評価がたいへん難しいということです．

この困難は，**ユークリッド化** という方法で回避することができます．実際，4次元時空の座標 $x = (x_1, x_2, x_3, t)$ の時間座標 t を，純虚数 ix_4 で置き換えると，ローレンツ計量

$$ds^2 = dx_1^2 + dx_2^2 + dx_3^2 - dt^2$$

は，ユークリッド計量

$$ds^2 = dx_1^2 + dx_2^2 + dx_3^2 + dx_4^2$$

に変わり，(5.2) の位相の虚数単位も消えて，

$$\frac{1}{Z}\exp(-S_E(\varphi))d\varphi \tag{5.3}$$

という形になります[7]．実際には，時間座標を解析接続して，虚数軸上への境界値をとるのですが，この手続きは，ローレンツ不変な理論と回転不変な理論の間の翻訳関係として，一般的に処理できることが知られています．

ローレンツ計量	$t = ix_4$	**ユークリッド計量**
(x_1, x_2, x_3, t)	$\Longleftrightarrow$	(x_1, x_2, x_3, x_4)
$\int e^{(i/\hbar)S(\phi)}d\phi$		$\int e^{-S_E(\phi)}d\phi$

さて第二の困難は，(5.2) による積分が，無限次元の **関数空間上の積分** であるということです．そこで，場 $\varphi(x)$ の定義域 $\mathbb{R}^4$ を格子化することを考えます．すなわち，$a>0$ として，$\mathbb{R}^4$ を格子間隔 a の格子 $a\mathbb{Z}^4$ で近似し，

$$d\varphi = \prod_{x\in a\mathbb{Z}^4} d\varphi(x)$$

とします．このようにすれば，ユークリッド化された場の量子論のモデルを統計力学のモデルで近似することができ，逆に $a \to 0$ の連続極限をとることによって，場の量子論に到達することができるでしょう．

格子上の統計力学系	$a \to 0$ $\Longrightarrow$	**ユークリッド的場の量子論**

ただし，数学的に問題なく定義できるのは有限次元の積分ですから，まず，4 節で考えたような有限個の点からなる格子上の統計力学系から出発し，それを無限格子 $a\mathbb{Z}^4$ に広げる極限もとる必要があります．この極限を

[7] (5.1) の右辺の dx から，虚数単位 i が出ます．またプランク定数は，ユークリッド的作用 S_E に吸収しました．

無限体積極限 または **熱力学的極限** といいます．冒頭にも述べたとおり，この極限に絡んで **相転移** の問題が生じます．また，連続極限には **繰り込み** と呼ばれる別の問題もあります．これらの問題については，次の節で論じることにしましょう．

6° 連続極限

3 節で考えた 1 次元イジングモデルでは，遠いスピン同士の相関は指数的に減衰しましたが，2 次元以上ではどうでしょうか．

(4.4) で定義されるモデルにおいて，二つのスピン φ_x, φ_y の相関

$$S_\Lambda(x,y) = \int \varphi_x \varphi_y P_\Lambda(\varphi) d\varphi_\Lambda \,, \quad x, y \in \Lambda$$

を考え，その無限体積極限を

$$S(x,y) = \lim_{\Lambda \to \mathbb{Z}^d} S_\Lambda(x,y)$$

とします．このとき，

$$S(x,y) \sim \exp(-m|x-y|) \,, \quad |x-y| \sim \infty \tag{6.1}$$

のように指数的に減衰するかどうかが問題です．

(4.5) のように最隣接相互作用するスピン系では，情報は隣り同士の伝言ゲームで伝播するしかないのですが，おもしろいことに，相互作用の強さ J が十分大きいとき，正の定数 γ が存在して

$$S(x,y) \to \gamma \,, \quad |x-y| \to \infty \tag{6.2}$$

となることが知られています．つまり，相互作用が十分強いときには，隣り同士で相談するだけで，スピン全体がほぼ同じ向きにそろってしまうのです．ここで，逆温度 $\frac{1}{kT}$ を J に吸収しましたから，J が大きいということ

は，温度 T が小さいことを意味します．すなわち，系が十分低温なら (6.2) が成り立ち (低温相)，十分高温なら (6.1) が成り立ちます (高温相)．そして，低温相と高温相の境界を **相転移点** といいます．特に，連続極限を議論するときには，相転移点で相関距離が発散するモデルが重要です．それは，次のような理由によります．

• 連続極限

格子間隔 1 の格子上に定義されたスピン系を，格子間隔 a の格子上に定義し直すのは簡単です．それは単に，格子点の座標をつけ変えるだけであり，カメラのズームアウトのようにスケールが変わるにすぎません．このとき，もとのスピン系の相関距離を $1/m$ とすると，ズームアウトしたスピン系の相関距離は a/m に変わります．したがって，m を固定して $a \to 0$ の極限をとると，相関距離が 0 のモデル，すなわち，場が各点でばらばらに揺らぐモデルになってしまい，物理的な意味をもちません．

そこで，再び 3 節の 1 次元イジングモデルを考えてみます．その相関距離は $1/m = -1/\log\tanh J$ でしたから，格子間隔 a の格子に乗せれば，その相関距離は $a/m = -a/\log\tanh J$ となります．そこで，J を a とともに変化させ，相関距離 $1/m$ が発散するように，そして，あらかじめ定めた正の定数 m_* に対して，$a/m = 1/m_*$ となるようにします．そのためには，

$$\tanh J = e^{-m_* a}$$

のように J を取ればよいわけです．$a \to 0$ とすると $J \to \infty$ となることに注意しましょう．

このように，意味のある連続極限を得るために，格子モデルのパラメータを適切に調節することを，**繰り込み** と呼びます[8]．1 次元イジングモデル

[8] 伝統的な繰り込み理論は連続時空で議論されるので，始めから $a = 0$ となっています．このとき，モデルを定めるパラメータは無限大数としなければなりません．

は単純なので，パラメータの繰り込み方がすぐ分かりました．一般の場合こう簡単にはいきませんが，相関距離が発散するようにパラメータを調節することが必要です．すなわち，連続極限を構成するには，相転移点で相関距離が発散する格子モデルが必要なのです．

• 繰り込み群解析

4 節で説明した繰り込み群解析を用いて，連続極限をとることを考えます．

$N = 1, 2, 3, \cdots$ として，格子間隔 $a = L^{-N}$ の格子上にスピン系が定義されており，その確率分布が P_N であるとします．各 P_N が (4.4) のような形をもつとき，P_{N+1} と P_N が大局的に似ているかどうか調べるにはどうしたらいいでしょうか．(4.4) に現れるハミルトニアンや，(4.1) の単独スピン分布 h を見ても，異なる格子上に定義されたスピン系の比較はできません．

そこでまず，共通の格子の上で比較するために，P_{N+1} に繰り込み群変換 $\mathcal{R}$ を施して，格子間隔 L^{-N} の格子上のスピン系 $\mathcal{R}P_{N+1}$ に変換します．これで $\mathcal{R}P_{N+1}$ と P_N を比較することができるかというと，そうはいきません．というのは，$\mathcal{R}P_{N+1}$ は，もはや (4.4) のような見やすい形に表せないからです．そこでさらに，両者の大局的な情報を引き出すために，繰り込み群変換を何度も施します．もしも $\mathcal{R}P_{N+1}$ と P_N の大局的な振る舞いが同じなら，$\mathcal{R}^{n+1}P_{N+1}$ と $\mathcal{R}^n P_N$ は次第に近づいてくるでしょう．

$$
\begin{array}{ccccccc}
a = L^{-N-1} & & a = L^{-N} & & a = L^{-N+1} & & a = L^{-N+n} \\
\boxed{P_{N+1}} & \Rightarrow & \boxed{\mathcal{R}P_{N+1}} & \Rightarrow & \boxed{\mathcal{R}^2 P_{N+1}} & \Rightarrow \cdots \Rightarrow & \boxed{\mathcal{R}^{n+1} P_{N+1}} \\
 & & \boxed{P_N} & \Rightarrow & \boxed{\mathcal{R}P_N} & \Rightarrow \cdots \Rightarrow & \boxed{\mathcal{R}^n P_N}
\end{array}
$$

このように P_{N+1} と P_N を比較することにより，$P_N, N = 1, 2, 3, \cdots$ ，がコーシー列をなすように格子モデルの列を作ることができれば，$N \to \infty$ の連続極限が存在することになります．

- **結論**

上に説明した繰り込み群の方法は，そのアイディアそのものは単純ですが，厳密な解析は困難を極めます．実は，イジングモデルに対する繰り込み群変換は，ある特殊な場合を除くと，厳密に解析することがまだできません．現在までに得られたのは，

- **ガウス測度** という数学的に扱いやすい測度の近傍にある統計力学系に対して，繰り込み群解析が厳密に実行できる

という成果にほぼ限られます．ガウス測度は数学的に重要な対象ですが，物理的な場の量子論においては，粒子の生成消滅を伴わない自明な理論を意味します．すなわち，現在厳密に繰り込み群解析を適用できるのは，粒子の生成消滅反応が十分弱い場合に限られるわけです．

また，上に説明した繰り込み群と根本的なアイディアは同じでも，具体的な定義のしかたが異なる繰り込み群変換も考えられますし，さらに，3 次元以下のモデルでは，繰り込み群変換を用いないで連続極限を構成できる場合もあります．結局，

- 3 次元以下のスピン系に対して，自明でない連続極限が存在する
- 5 次元以上のスピン系に対して，自明でない連続極限は存在しない

ということが分かりました．「自明でない」というのは，ガウス測度にならないという意味です．

それでは，物理的にいちばん重要な 4 次元ではどうかというと，

- 4次元のスピン系に対して，自明でない連続極限は存在しないだろう

と予想されています．実際，**ガウス測度の近傍**にあるモデルの連続極限については，この予想が正しいことが確かめられていますが，イジングモデルのようにガウス測度から遠く離れたモデルの連続極限の場合，まだ最終的な結論は得られていません．

このように，場の量子論を数学的に厳密に構築する問題のうち，たいへん重要ないくつかが未解決のまま残されています．特に，4次元において，自明でない場の量子論のモデルは存在するのか否か．これらは結局

ガウス測度から遠く離れた領域での繰り込み群解析の問題

であると言えます．そして，数学的な立場からみると，これらの問題は，繰り込み群解析の完成を促すために数学者に与えられたかのようにも思われます．

参考文献

[1] 渡辺 浩，くりこみ群，数理科学 2001年12月，40–46.

[2] 伊東恵一，構成的場の理論の軌跡と展望，数理科学 2001年4月，49–57.

[3] International Journal of Modern Physics B, **14**, 12&13 (2000) の諸記事.

[4] 服部哲弥・渡辺 浩，20世紀の予想 / 構成的場の量子論，数学セミナー 1999年3月，44–49.

[5] 渡辺 浩，場の量子論の数学的構成，日本医科大学基礎科学紀要，第22号 (1997)，1–67.

[6] 数理科学 1997年4月特集「くりこみ理論の地平」の諸記事.

[7] 原 隆，くりこみ群の (厳密なる) 取り扱い，数学 41巻 (1989), 75–83.

[8] 伊東恵一，構成的場の理論，数学 38巻 (1986), 165–176.

第4話

部分因子環と代数的場の量子論

泉 正己

1° はじめに

有理数全体 $\mathbb{Q}$，実数全体 $\mathbb{R}$，複素数全体 $\mathbb{C}$ のように四則を持つ数学的対象を体という．体とその部分体の包含関係の様子を記述するのが古典的なガロワ理論である．読者の中にも抽象代数を学び始めたころにその理論の美しさに感銘を受けた人は少なくないと思う．

ヒルベルト空間の有界作用素からなる環で＊演算と適当な位相に関して閉じているものの総称を**作用素環**という.「作用素環とその部分環の包含関係の様子を記述する理論は何か? ガロワ理論に代わる新しい数学がそこにあるのか?」Jones のこの素朴な疑問により約 20 年前に始まった部分因子環の理論は [7]，その後の彼自身による結び目の不変量の発見に代表されるように [8]，数学や数理物理学に全く新しい局面をもたらしている．代数的場の量子論と部分因子環の理論の関係は 1980 年代末に Fredenhagen-Rehren-Schroer [5] や Longo [12] により発見され，1990 年代に共形場理論と結びつき現在もなお発展し続けている (たとえば [10, 14] 参照).

ここでいう代数的場の量子論とは 1950 年代に始まった公理的場の理論の一種であり，時空の有界領域の中の観測可能量のなす代数を基礎とする，場の量子論の厳密な数学的解析の試みである．量子力学では観測可能量がヒルベルト空間上の自己共役作用素となるので，定められた時空の有界領域内の観測可能量全体は一つの作用素環を生成する．これら時空の有界領域ごとに定まる作用素環の族は，相対論と量子論から要請される多くの制約

を受ける．たとえば，相対論的要請によって，互いに空間的な位置にある二つの有界領域にある観測可能量は，互いに交換しなければならない．公理的場の理論では，このようにモデルに依存せずに場の量子論がみたすべき要請のみを仮定して，数学的に厳密に求められる結果を探ることを目標としている．代数的場の量子論の詳細は創始者たちによる本 [1, 6] に詳しく述べられている．

代数的場の量子論の中で特に部分因子環の理論と深い関係を持つのが，Doplicher-Haag-Roberts の**セクター理論**である [3]．上で述べたように観測可能量を考えている上では，作用素の交換関係は自然に現れてもフェルミオンのような反交換関係が現れることはない．セクター理論では，観測可能量の代数の表現のみから出発して素粒子の統計や場の代数の存在が導かれ，それらの交換関係や反交換関係が自然に得られる．1980 年代後半に，この統計の様子を記述するパラメータと部分因子環の Jones 指数が本質的に同じものであることがわかって以来，セクター理論と部分因子環の理論は互いに大きな影響を与え，この二つの分野の専門家の交流も盛んになっている．

この小文では

Jones の部分因子環理論とは何か

を紹介することを主な目標とし，それが

いかにして代数的場の量子論と結びつくか

までを解説する．作用素環というものが専門家以外の読者の目に触れることがほとんどない現状なので，本小文が同時に“作用素環入門”の役割を果たせば幸いである．部分因子環理論のより詳しい内容については，比較的最近までの結果がまとめられた教科書 [4] や解説 [9] を参照されたい．

2° 作用素環論速習コース

本節では，まず部分因子環の理論と代数的場の量子論に必要な作用素環論の基礎を手短かに解説する．

2.1 $\mathbb{B}(\mathcal{H})$ の位相

ヒルベルト空間 $\mathcal{H}$ 上の線型作用素 T に対してその**作用素ノルム**を

$$||T|| = \sup_{\xi\in\mathcal{H}\setminus\{0\}} \frac{||T\xi||}{||\xi||}$$

と定める．$||T||$ が有限のとき，T は有界作用素であるといい，$\mathcal{H}$ 上の有界線型作用素全体を $\mathbb{B}(\mathcal{H})$ を書くことにする．量子力学に現れる作用素は非有界なものが多いが，それらの適当な有界な関数を考えることにより，理論的には有界作用素のみを扱ってもあまり問題は起きない．

作用素ノルムにより $\mathbb{B}(\mathcal{H})$ はバナッハ空間となるが，$\mathbb{B}(\mathcal{H})$ にはノルム位相より弱い複数の自然な位相が存在する．

定義 2.1 $\{T_\lambda\}_{\lambda\in\Lambda}$ を $\mathbb{B}(\mathcal{H})$ のネット（点列の一般化）とし，$T \in \mathbb{B}(\mathcal{H})$ とする．

(1) $\{T_\lambda\}_{\lambda\in\Lambda}$ が T に**強位相で収束**するとは次が成り立つことである：

$$\lim_{\lambda\in\Lambda} ||(T_\lambda - T)\xi|| = 0, \quad \forall\xi \in \mathcal{H}.$$

(2) $\{T_\lambda\}_{\lambda\in\Lambda}$ が T に**弱位相で収束**するとは次が成り立つことである：

$$\lim_{\lambda\in\Lambda}\langle(T_\lambda - T)\xi, \eta\rangle = 0, \quad \forall\xi, \eta \in \mathcal{H}.$$

(3) $\{T_\lambda\}_{\lambda\in\Lambda}$ が T に **σ 弱位相で収束**するとは次が成り立つことである：

$$\lim_{\lambda\in\Lambda} \sum_{n=1}^{\infty} |\langle(T_\lambda - T)\xi_n, \eta_n\rangle| = 0.$$

ここで，$\{\xi_n\}_{n=1}^{\infty}$，$\{\eta_n\}_{n=1}^{\infty}$ は

$$\sum_{n=1}^{\infty} ||\xi_n||^2 < \infty, \quad \sum_{n=1}^{\infty} ||\eta_n||^2 < \infty$$

をみたす $\mathcal{H}$ の任意の列である．

これらの位相の違いは作用素の近似の度合いの違いを表しているのだが，それが物理的意味を持つこともしばしばである．ノルムが有界な集合上では，弱位相と σ 弱位相は一致するのでその違いはあまり大きくはない．しかし以下に見る C^* 環と von Neumann 環の違いに現れるように，ノルム位相とその他の位相の差は非常に大きい．

2.2　C^* 環

$\mathbb{B}(\mathcal{H})$ は線型空間でありかつ合成により積が定義されるので，$\mathbb{C}$ 上の代数（ベクトル空間かつ環）になっているが，さらに $T \in \mathbb{B}(\mathcal{H})$ に対してその共役作用素 T^* を対応させる $*$（「スター」と読む）演算を持つ．ここで $T^* \in \mathbb{B}(\mathcal{H})$ は

$$\langle T\xi, \eta\rangle = \langle \xi, T^*\eta\rangle, \quad \forall \xi, \eta \in \mathcal{H}$$

をみたす唯一の作用素である．一般に，$\mathbb{B}(\mathcal{H})$ の部分集合でこれらの演算に関して閉じているものを，$\mathbb{B}(\mathcal{H})$ の $*$ 部分代数という．

定義 2.2　$\mathbb{B}(\mathcal{H})$ の $*$ 部分代数 $\mathcal{A}$ がノルム位相に関して閉じているとき，$\mathcal{A}$ を $\boldsymbol{C^*}$ **環**という．

C^* 環をヒルベルト空間を使わずに抽象的に特徴づけることも可能である．実際，多くの教科書では C^* 環はバナッハ $*$ 環でそのすべての元 T に対して C^* 条件 $||TT^*|| = ||T||^2$ をみたすものとして定義されている．このように抽象的に定義された C^* 環は必ず具体的な（つまり我々の定義の意味での）C^* 環と等長 $*$ 同型であることが知られている．

比較的簡単な C^* 環の例をいくつか挙げよう．

(1)　$\mathbb{B}(\mathcal{H})$ 自体は C^* 環である．特に，$\mathcal{H}$ が有限次元でその次元が n であるとき，$\mathbb{B}(\mathcal{H})$ は行列環 $M(n,\mathbb{C})$ に他ならないので，$M(n,\mathbb{C})$ は C^* 環である．すべての有限次元 C^* 環は行列環のいくつかの直和と同型であることが知られている．

(2)　$\mathcal{H}$ 上のコンパクト作用素全体 $\mathbb{K}(\mathcal{H})$ は ($\mathcal{H}$ が無限次元なら) 単位元を持たない C^* 環である．$\mathbb{K}(\mathcal{H})$ は $\mathbb{B}(\mathcal{H})$ の唯一の自明でない閉イデアルである．

(3)　コンパクトハウスドルフ空間 X 上の複素数値連続関数全体 $C(X)$ は，各点ごとの演算により $\mathbb{C}$ 上の代数となる．$f \in C(X)$ に対してノルムと＊演算を

$$||f|| = \sup_{x\in X} |f(x)|,$$

$$f^*(x) = \overline{f(x)} \quad (\text{複素共役})$$

で導入すると，$C(X)$ は（抽象的な意味での）C^* 環となる．単位元を持つ可換 C^* 環は，必ずこのような C^* 環と同型であることが知られている (Gelfand-Naimark の定理)．この事実から C^* 環は位相空間の非可換版であると考えられ，その上で“非可換幾何学”を構成しようという試みも近年多くなされている [2].

2.3　状態と表現

以後，便宜上 C^* 環と言えばつねに単位元を持つものを意味するとする．C^* 環 $\mathcal{A}$ に含まれる正作用素全体を $\mathcal{A}_+$，ユニタリ作用素全体を $U(\mathcal{A})$ と書く．$\mathcal{A}$ 上の有界線型汎関数全体 $\mathcal{A}^*$ は $\mathcal{A}$ の双対空間と呼ばれ，バナッハ空間の構造を持つ．

定義 2.3　C^* 環 $\mathcal{A}$ の有界線型汎関数 φ が $\varphi(\mathcal{A}_+) \subset \mathbb{R}_{\geq 0}$, $\varphi(1) = 1$ を

みたすとき，φ は $\mathcal{A}$ の**状態**であるという．$\mathcal{A}$ の状態全体を $S(\mathcal{A})$ と書く．$\varphi \in S(\mathcal{A})$ が $S(\mathcal{A})$ の他の元の凸結合で表せないとき，φ は**純粋状態**であるという．$\mathcal{A}$ の純粋状態全体を $P(\mathcal{A})$ と書く．

$S(\mathcal{A})$ は $\mathcal{A}^*$ の汎弱位相でコンパクトな凸集合なので，Krein-Milman の端点定理により $P(\mathcal{A})$ の元の凸結合全体は $S(\mathcal{A})$ の中で稠密である．一方 $\mathcal{A}^*$ の任意の元は $S(\mathcal{A})$ の元の線型結合で表されるので，純粋状態は $\mathcal{A}$ の任意の異なる2元を区別できるほど十分たくさん存在する．以下に見るように，このことは $\mathcal{A}$ が十分たくさん既約表現を持つことを意味するので，局所コンパクト群のユニタリ表現論においても基本的事実となっている．

ξ を $\mathcal{A}$ が作用しているヒルベルト空間の単位ベクトルとして，

$$\varphi(A) = \langle A\xi, \xi\rangle, \quad A \in \mathcal{A}$$

と定めると，φ は $\mathcal{A}$ の状態となる．一般の状態はこのように与えられるとは限らない．しかし，状態 φ から $\mathcal{A}$ の適当な表現を構成することにより，φ を上のようにベクトルで与えることができることを主張するのが以下に述べる Gelfand-Naimark-Segal (GNS) 構成定理である．その構成法は，物理的には真空期待値よりヒルベルト空間とその上の作用素を復元する手続きに相当する．

定義 2.4　$\mathcal{A}$ を C^* 環，$\mathcal{H}$ をヒルベルト空間とする．π が $\mathcal{A}$ から $\mathbb{B}(\mathcal{H})$ への＊準同型（代数の意味での準同型で＊演算を保つ写像）であるとき，$(\pi, \mathcal{H})$ を $\mathcal{A}$ の**表現**という．Ω が $\mathcal{H}$ の元で，$\pi(\mathcal{A})\Omega$ が $\mathcal{H}$ で稠密であるとき，Ω は $\pi(\mathcal{A})$ の**巡回ベクトル**であるという．$\mathcal{H}$ が巡回ベクトルを持つとき，$(\pi, \mathcal{H})$ は**巡回表現**であるという．$(\pi_i, \mathcal{H}_i)$, $i = 1, 2$, が $\mathcal{A}$ の表現で，$\mathcal{H}_1$ から $\mathcal{H}_2$ へのユニタリ作用素 U で

$$U\pi_1(A) = \pi_2(A)U, \quad \forall A \in \mathcal{A}$$

をみたすものが存在するとき，$(\pi_1, \mathcal{H}_1)$ と $(\pi_2, \mathcal{H}_2)$ は**ユニタリ同値**であるという．

定理 2.5 (GNS) $\mathcal{A}$ を C^* 環，$\varphi \in S(\mathcal{A})$ とする．このとき $\mathcal{A}$ の巡回表現 $(\pi_\varphi, \mathcal{H}_\varphi)$ と巡回ベクトル Ω_φ で

$$\varphi(A) = \langle \pi_\varphi(A)\Omega_\varphi, \Omega_\varphi \rangle, \quad \forall A \in \mathcal{A}$$

をみたすものが存在する．三つ組 $(\pi_\varphi, \mathcal{H}_\varphi, \Omega_\varphi)$ はユニタリ同値を除いて一意的に定まる．

次に，状態と表現のより詳細な関係を与えよう．$\mathbb{B}(\mathcal{H})$ の部分集合 S に対して

$$S' = \{T \in \mathbb{B}(\mathcal{H});\ TA = AT,\ \forall A \in S\}$$

とおき，これを S の**コミュタント**という．さらに $S'' = (S')'$ と定める．

定理 2.6 C^* 環上の状態 φ に対して次の条件は同値である：

(1) φ は純粋状態である．

(2) $\pi_\varphi(\mathcal{A})' = \mathbb{C}1$（スカラー作用素のみ）．

(3) $\pi_\varphi(\mathcal{A})'' = \mathbb{B}(\mathcal{H}_\varphi)$.

(4) $\pi_\varphi(\mathcal{A})$ で不変な $\mathcal{H}_\varphi$ の部分空間は $\{0\}$ と $\mathcal{H}_\varphi$ のみである．

(5) $\pi_\varphi(\mathcal{A})$ で不変な $\mathcal{H}_\varphi$ の閉部分空間は $\{0\}$ と $\mathcal{H}_\varphi$ のみである．

(3) は $\mathbb{B}(\mathcal{H}_\varphi)$ のすべての作用素が，強位相の意味で $\pi_\varphi(\mathcal{A})$ の元で近似できることを意味する．(5) は表現 $(\pi_\varphi, \mathcal{H}_\varphi)$ が二つの表現の直和に分解しないことを意味し，このような表現は**既約表現**と呼ばれている．

$\mathcal{A}$ が物理系の観測可能量や場の作用素のなす C^* 環であるとき，系の対称性は $\mathcal{A}$ の自己同型（または反自己同型）により記述される．位相群 G からヒルベルト空間 $\mathcal{H}$ のユニタリ作用素全体 $U(\mathcal{H})$ への連続準同型を**ユニタ**

リ表現という．ただし，$U(\mathcal{H})$ の位相としては強位相（弱位相でもこの場合同値）を考える．G から $\mathcal{A}$ の自己同型群 $\mathrm{Aut}(\mathcal{A})$ への連続準同型を G の $\mathcal{A}$ への作用という．α が G の $\mathcal{A}$ への作用であるとき，三つ組 $(\mathcal{A}, G, \alpha)$ を C^* 力学系という．$\mathcal{A}$ の表現 $(\pi, \mathcal{H})$ と，G のユニタリ表現 $U : G \to U(\mathcal{H})$ が

$$\pi(\alpha_g(A)) = U(g)\pi(A)U(g)^*, \quad \forall A \in \mathcal{A},\ \forall g \in G$$

をみたすとき，$(\pi, \mathcal{H}, U)$ を $(\mathcal{A}, G, \alpha)$ の**共変表現**という．

次の定理は状態が対称性を持てば（つまり自発的対称性の破れがなければ），その対称性がユニタリ作用素により実現されることを意味する．

定理 2.7 $(\mathcal{A}, G, \alpha)$ を C^* 力学系とし，φ を α で不変な $\mathcal{A}$ の状態 (すべての $g \in G$ に対して $\varphi \cdot \alpha_g = \varphi$) とする．このとき G の $\mathcal{H}_\varphi$ 上のユニタリ表現 U_φ で，すべての $g \in G$ に対して $U_\varphi(g)\Omega_\varphi = \Omega_\varphi$ かつ $(\pi_\varphi, \mathcal{H}_\varphi, U_\varphi)$ が $(\mathcal{A}, G, \alpha)$ の共変表現であるようなものがただ一つ存在する．

2.4　von Neumann 環

定義 2.8 $\mathbb{B}(\mathcal{H})$ の強位相 (弱位相や σ 弱位相でもこの場合よい) で閉じた＊部分代数を **von Neumann 環**という (以下 **v. N. 環**と表記する).

ノルム位相は強位相より強い位相なので，v. N. 環は C^* 環でもある．S が＊演算に関して閉じた $\mathbb{B}(\mathcal{H})$ の部分集合であるとき，S' は v. N. 環であり，さらに S'' は S と $\mathbb{B}(\mathcal{H})$ の単位元を含む最小の v. N. 環である．二つの v. N. 環の間の同型写像は必ず σ 弱位相に関して同相写像になり，C^* 環の場合と同様に v. N. 環をヒルベルト空間を使わずに特徴づけることも可能である (境の定理).

簡単な v. N. 環の例を挙げよう．

(1)　$\mathbb{B}(\mathcal{H})$ は v. N. 環である．

(2)　(X,μ) を測度空間，$L^\infty(X,\mu)$ を X 上の本質的有界関数全体とする．$L^\infty(X,\mu)$ の元をヒルベルト空間 $L^2(X,\mu)$ 上の掛け算作用素と同一視することにより，$L^\infty(X,\mu)$ は v. N. 環となる．すべての可換 v. N. 環はこのような v. N. 環と同型である．この事実より，v. N. 環は測度空間の非可換版であるとも考えられる．

v. N. 環 $\mathcal{M}$ の元であって $\mathcal{M}$ の元すべてと交換するもの全体を $\mathcal{M}$ の中心と呼び，$\mathcal{Z}(\mathcal{M})$ と書く．$\mathcal{Z}(\mathcal{M})$ がスカラー作用素のみからなるとき，$\mathcal{M}$ は**因子環**であるという．中心 $\mathcal{Z}(\mathcal{M})$ は可換 v. N. 環なので，上述のように，ある測度空間 (X,μ) が存在して $\mathcal{Z}(\mathcal{M})$ は $L^\infty(X,\mu)$ と同一視される．この同一視を使って，一般の v. N. 環を因子環の直積分（連続的直和）

$$\mathcal{M} = \int_X^{\oplus} \mathcal{M}(\omega)d\mu(\omega)$$

に分解することが可能である．ここでほとんどすべての $\omega \in X$ に対して $\mathcal{M}(\omega)$ は因子環である．このように因子環は v. N. 環の基本構成要素であり，v. N. 環に関する研究はほとんどの場合因子環の研究に帰着される．

因子環は射影作用素の同値類全体の構造により，I_n $(n = 1, 2, \cdots, \infty)$ 型，II_1 型，II_∞ 型，III 型に分類される．ここではその定義でなく，特徴づけを与えよう．

(1)　I_n 型因子環は $\mathbb{B}(\mathcal{H})$ と同型である．ここで n はヒルベルト空間 $\mathcal{H}$ の次元である．

(2)　II_1 型因子環は，（ただ一つ）トレース状態を持つ無限次元の因子環として特徴づけられる．ここで状態 τ がトレースであるとは，$\tau(AB) = \tau(BA)$ が任意の元 A, B に対して成り立つことである．II_1 型因子環には，任意の $t \in [0,1]$ に対して $\tau(P) = t$ をみたす直交射影 P が必ず存在する．この事実から，しばしば II_1 型因子環は連続次元を持つとも言われる．

(3)　II_∞ 型因子環は I_∞ 型因子環と II_1 型因子環のテンソル積に分解する．

(4)　上記以外の因子環はすべて III 型因子環である．因子環 $\mathcal{M}$ が III 型で

ある必要十分条件は，任意の 0 でない $\mathcal{M}$ の直交射影 P と Q が $\mathcal{M}$ の中で同値になることである (つまり $\mathcal{M}$ の元 V が存在して $P = VV^*$, $Q = V^*V$ となることである).

II_1 型因子環や III 型因子環の例として，無限テンソル積から構成されるものを挙げよう．$\mathcal{A}_1 = M(2,\mathbb{C})$ として $\mathcal{A}_n$ を帰納的に

$$\mathcal{A}_{n+1} = \mathcal{A}_n \otimes M(2,\mathbb{C}) \cong M(2^{n+1},\mathbb{C})$$

と定める．ここで $\mathcal{A}_n$ を $\mathcal{A}_{n+1}$ の部分代数 $\mathcal{A}_n \otimes \mathbb{C}1$ と同一視することにより，有限次元 C^* 環の帰納系が得られる．$\mathcal{A}_n$ の $\mathcal{A}_{n+1}$ への埋め込みはノルムを保つので，$\{\mathcal{A}_n\}_{n=1}^{\infty}$ の帰納的極限 $\mathcal{A}_\infty$ も C^* 条件をみたすノルムを持つ．$\mathcal{A}_\infty$ の このノルムによる完備化 $\mathcal{A}$ は 2^∞ 型 UHF 環と呼ばれ，(抽象的な意味での) C^* 環となる．

$0 \leq \lambda \leq 1$ に対して，$M(2,\mathbb{C})$ 上の状態 ψ_λ を

$$\psi_\lambda(A) = \frac{1}{1+\lambda}\mathrm{Tr}(A\begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & \lambda \end{bmatrix}), \quad A \in M(2,\mathbb{C})$$

と定め，$\mathcal{A}_n$ 上の状態 $\varphi_{\lambda,n}$ を帰納的に $\varphi_{\lambda,1} = \psi_\lambda$, $\varphi_{\lambda,n+1} = \varphi_{\lambda,n} \otimes \psi_\lambda$ と定める．$\varphi_{\lambda,n+1}$ の $\mathcal{A}_n$ への制限は $\varphi_{\lambda,n}$ と一致するので，$\mathcal{A}$ 上の状態 φ_λ で，その $\mathcal{A}_n$ への制限が $\varphi_{\lambda,n}$ と一致するものが定まる．$\mathcal{R}_\lambda$ を $\pi_{\varphi_\lambda}(\mathcal{A})$ が生成する v. N. 環とすると，$\mathcal{R}_\lambda$ は $\lambda = 1$ のとき II_1 型因子環に，$\lambda = 0$ のとき I_∞ 型因子環に，それ以外のときは III 型因子環となる．これらの因子環はすべて非同型であることが知られている (Powers の定理).

2.5　因子環の正規表現

v. N. 環 $\mathcal{M} \subset \mathbb{B}(\mathcal{H})$ の状態や表現が σ 弱位相に関して連続なとき，**正規**であるという．$\mathcal{M}$ 上の正規状態はつねにトレースクラス作用素 $\rho \in \mathbb{B}(\mathcal{H})$ によって $\varphi(A) = \mathrm{Tr}(A\rho)$ $(\forall A \in \mathcal{M})$ の形で与えられる．正規状態による

GNS 表現はつねに正規表現である．一般に C^* 環の表現は多様であり，多くの場合その分類は不可能である．しかし，話を v. N. 環の正規表現に限れば，すべての表現は定義表現をどのくらいの重複度で含んでいるかのみで決定されると言ってよい．

v. N. 環 $\mathcal{M}$ の σ 弱位相で閉じたイデアルは，$\mathcal{Z}(\mathcal{M})$ の射影作用素 z により $z\mathcal{M}$ という形で与えられるものに限られる．正規表現の核は $\mathcal{M}$ の σ 弱位相で閉じたイデアルであるので，特に $\mathcal{M}$ が因子環であるとき，正規表現はつねに（中への）同型写像である．ここでは因子環の正規表現の構造をまとめておこう．ただし，ヒルベルト空間は可分なもののみを考える．以下，便宜上，表現の記号を省略する．

(1)　I 型因子環はあるヒルベルト空間 $\mathcal{H}$ に対して $\mathbb{B}(\mathcal{H})$ と同型であった．I 型因子環の正規表現は，この $\mathcal{H}$ 上の表現の有限または無限個の直和表現に限られる．

(2)　$\mathcal{M}$ を II_1 型因子環，τ を $\mathcal{M}$ 上のトレース状態とし，その GNS ヒルベルト空間を $L^2(\mathcal{M})$ と書く．このとき $\mathcal{M}$ の正規表現 $\mathcal{H}$ に対して，$\mathcal{H}$ が $L^2(\mathcal{M})$ をいくつ含むかによって定まる数 $\dim_{\mathcal{M}}\mathcal{H} \in (0,\infty]$ ($\mathcal{M}$ に関する相対次元) が定まる．ただし $\mathcal{M}$ が“連続次元”を持つことから，$\dim_{\mathcal{M}}\mathcal{H}$ は整数以外の値をとり得る．$\mathcal{M}$ の正規表現は $\dim_{\mathcal{M}}\mathcal{H}$ により完全に決定される．$\dim_{\mathcal{M}}\mathcal{H}$ が有限のとき，$\mathcal{M}$ の $\mathbb{B}(\mathcal{H})$ の中でのコミュタント $\mathcal{M}'$ も II_1 型因子環であり，$\dim_{\mathcal{M}'}\mathcal{H} = 1/\dim_{\mathcal{M}}\mathcal{H}$ が成り立つ．

(3)　II_∞ 型因子環の正規表現は二つしかなく，それらは像のコミュタントが II_∞ 型であるか II_1 型であるかにより区別される．

(4)　III 型因子環の正規表現はただ一つしかない．つまり，すべての正規表現は定義表現とユニタリ同値である．

3° 部分因子環

さて，いよいよ本題の一つである部分因子環の理論の話に移ろう．作用素環の"ガロワ理論"を建設するのには，まず体の拡大の次数に相当する概念が必要である．体 L が 体 K の部分体であるとき，その次数 $[K:L]$ とは，K を L 上のベクトル空間とみなしたときの次元であった．まずは Jones [7] に従って，このような素朴な考え方が通用する II_1 型因子環の場合から話を始めよう．

3.1　II_1 型因子環の部分因子環

$\mathcal{M}$ を II_1 型因子環とする．$\mathcal{M}$ をトレース状態の GNS 表現の像と同一視することにより，$\mathcal{M}$ は $L^2(\mathcal{M})$ に作用しているとみなすことができる．以下，$\mathcal{M}$ の部分因子環とは $\mathcal{M}$ の部分環かつ因子環で $\mathcal{M}$ と共通の単位元を持つものとする．$\mathcal{N}$ が $\mathcal{M}$ の無限次元の部分因子環であれば，$\mathcal{N}$ もトレース状態を持つので II_1 型因子環である．

定義 3.1 (Jones)　II_1 型因子環の包含関係 $\mathcal{M} \supset \mathcal{N}$ の**指数** $[\mathcal{M}:\mathcal{N}]$ を，相対次元 $\dim_{\mathcal{N}} L^2(\mathcal{M})$ で定義する．

まず，定義より直ちに従う指数の基本的性質をいくつか挙げておこう．

(1)　$[\mathcal{M}:\mathcal{N}]=1$ となるのは $\mathcal{M}=\mathcal{N}$ の場合に限る．

(2)　$[\mathcal{M}:\mathcal{N}]=[\mathcal{N}':\mathcal{M}']$．

(3)　$\mathcal{P}$ が $\mathcal{N}$ の部分因子環のとき，$[\mathcal{M}:\mathcal{P}]=[\mathcal{M}:\mathcal{N}][\mathcal{N}:\mathcal{P}]$．

$L^2(\mathcal{M})$ には $L^2(\mathcal{N})$ のコピーが入っているので，相対次元の定義から $[\mathcal{M}:\mathcal{N}]\in[1,\infty]$ であることがすぐにわかるが，実際に指数はどのような値をとるのであろうか．体のガロワ理論から類推すれば，「指数は必ず自然数である」というのが一つのもっともらしい予想である．一方，II_1 型因子環が連続次元を持つということを考慮すると，「指数は 1 以上のすべての数

をとり得る」という予想もあり得る．しかし現実はこのような単純な考察をはるかに超えたものになっている．Jones は [7] の中で，次の驚くべき事実を示した．

定理 3.2 $\mathcal{N}$ を II_1 型因子環 $\mathcal{M}$ の部分因子環とする．このとき

$$[\mathcal{M}:\mathcal{N}] \in \left\{4\cos^2\frac{\pi}{N}\,;\ N=3,4,\cdots\right\} \cup [4,\infty]$$

が成立する．逆に，右辺の集合のどの値に対してもそれを指数とする II_1 型因子環の組 $\mathcal{M} \supset \mathcal{N}$ が存在する．

いったいなぜこのような不思議なことが起こるのであろうか．以下 Jones の原論文 [7] に沿った説明を行うが，その議論は最終的には計算によっており，必ずしも上の疑問の満足いく答えにはならない．しかし理論の誕生から約 20 年を経た現在では，上の疑問に対して複数の説得力のある答えを与えることが可能である．「部分因子環はいつもグラフを伴って現れ，指数とはそのグラフの隣接行列のノルムの２乗だから」というのがその一つの答えである．「指数はテンソル圏（たとえば量子群の表現の圏）の q 次元の２乗だから」と言うこともできる．これらの“答え”のより正確な意味に興味を持たれた読者は，文献 [4] を参照していただきたい．

3.2　基本構成

部分因子環やその指数のいろいろな性質を導くための重要な操作である，基本構成について説明しよう．

定義 3.3 $\mathcal{B}$ を C^* 環 $\mathcal{A}$ の C^* 部分環とする．$\mathcal{A}$ から $\mathcal{B}$ への線型写像 E が次をみたすとき，E を**条件つき期待値**と呼ぶ：

(1)　$E(\mathcal{A}_+) = \mathcal{B}_+$.

(2)　$E(b_1ab_2) = b_1E(a)b_2 \quad (\forall a \in \mathcal{A},\ \forall b_1, b_2 \in \mathcal{B})$.

(3)　$E(1) = 1$.

$\mathcal{M} \supset \mathcal{N}$ を指数有限な II_1 型因子環の組とし，τ を $\mathcal{M}$ のトレース状態とする．このとき，$\mathcal{M}$ から $\mathcal{N}$ への条件つき期待値 $E_{\mathcal{N}}$ で，

$$\tau(AB) = \tau(E_{\mathcal{N}}(A)B)\,, \quad \forall A \in \mathcal{M},\ \forall B \in \mathcal{N}$$

をみたすものがただ一つ存在する．

$\Omega_\tau \in L^2(\mathcal{M})$ を GNS 巡回ベクトルとし，$L^2(\mathcal{M})$ 上の反ユニタリ作用素 $J_{\mathcal{M}}$ と直交射影作用素 $e_{\mathcal{N}}$ を次のように定める：

$$J_{\mathcal{M}} A \Omega_\tau = A^* \Omega_\tau\,, \quad A \in \mathcal{M},$$

$$e_{\mathcal{N}} A \Omega_\tau = E_{\mathcal{N}}(A)\Omega_\tau\,, \quad A \in \mathcal{M}.$$

このとき，関係 $J_{\mathcal{M}}\mathcal{M}J_{\mathcal{M}} = \mathcal{M}'$ と $e_{\mathcal{N}}Ae_{\mathcal{N}} = E_{\mathcal{N}}(A)e_{\mathcal{N}}$ $(\forall A \in \mathcal{M})$ が成り立つ．$e_{\mathcal{N}}$ は Jones 射影と呼ばれ，$\mathcal{N}'$ に属している．$\mathcal{M}_1$ を $\mathcal{M}$ と $e_{\mathcal{N}}$ で生成される v. N. 環とすると，$\mathcal{M}_1 = J_{\mathcal{M}}\mathcal{N}'J_{\mathcal{M}}$ が成り立ち，$\mathcal{M}_1 \supset \mathcal{M}$ と $\mathcal{N}' \supset \mathcal{M}'$ は共役同型となる．このことから，$\mathcal{M}_1$ も II_1 型因子環であることがわかり，$[\mathcal{M}_1 : \mathcal{M}] = [\mathcal{M} : \mathcal{N}]$ が成り立つ．この $\mathcal{M} \supset \mathcal{N}$ から新たな包含関係 $\mathcal{M}_1 \supset \mathcal{M}$ を構成する操作を**標準構成**という．

$\mathcal{M}_1 \supset \mathcal{M}$ に標準構成を行いさらにそれを繰り返すと，II_1 型因子環の増加列

$$\mathcal{N} \subset \mathcal{M} \subset \mathcal{M}_1 \subset \mathcal{M}_2 \subset \mathcal{M}_3 \subset \cdots$$

と，直交射影の列 $e_{\mathcal{N}}, e_{\mathcal{M}}, e_{\mathcal{M}_1}, \cdots$ が得られる．τ_i を $\mathcal{M}_i$ のトレース状態とすると，τ_{i+1} の $\mathcal{M}_i$ への制限が τ_i と一致するので，$\bigcup_{i=1}^{\infty} \mathcal{M}_i$ 上のトレース状態 τ_∞ が定まる．$e_1 = e_{\mathcal{N}}$, $e_2 = e_{\mathcal{M}}$, $e_i = e_{\mathcal{M}_{i-2}}$ $(i > 2)$ と定めると，$\{e_i\}$ と τ_∞ は次をみたす：

(1)　$i \neq j \pm 1$ のとき e_i と e_j は交換し，e_i と $e_{i\pm1}$ は次の関係をみたす：

$$e_i e_{i\pm1} e_i = \frac{1}{[\mathcal{M} : \mathcal{N}]} e_i\,.$$

(2)　A が $\{e_i\}_{i=1}^n$ の生成する C^* 環 $C^*\{e_i\}_{i=1}^n$ の元ならば，

$$\tau_\infty(Ae_{n+1}) = \frac{1}{[\mathcal{M}:\mathcal{N}]}\tau_\infty(A).$$

(1) は **Jones relation** と呼ばれ，(2) をみたすトレースは**マルコフトレース**と呼ばれる．

(1) より $C^*\{e_i\}_{i=1}^n$ は有限次元であることがわかるので，行列環の有限個の直和と同型となる．さらに (2) より τ_∞ の $C^*\{e_i\}_{i=1}^n$ の単純成分上での値を具体的に決めることができ，結果として定理 3.2 の指数のとり得る値の制約を示すことが可能となる．逆に上の (1) と (2) をみたす代数を構成し，GNS 表現を行うことにより，定理 3.2 の離散的な部分を実現する部分因子環を構成することも可能である．

上で $q \in \mathbb{C}$ を $[\mathcal{M}:\mathcal{N}] = (q^{1/2}+q^{-1/2})^2$ をみたす数とし，$\mathcal{E}_i = (1-e_i)-qe_i$ とおくと，(1) は組みひも群の関係式

$$\mathcal{E}_i\mathcal{E}_{i\pm1}\mathcal{E}_i = \mathcal{E}_{i\pm1}\mathcal{E}_i\mathcal{E}_{i\pm1}\,,$$

$$\mathcal{E}_i\mathcal{E}_j = \mathcal{E}_j\mathcal{E}_i\,, \quad |i-j| \geq 2$$

に変換される．Jones はこの組みひも群の表現から，結び目の位相不変量 Jones 多項式を発見したのである．実際は，この表現はヘッケ環と呼ばれる環の $SU(2)$ に対応する表現なのであるが，[16] で Wenzl は 一般の $SU(N)$ に対応するヘッケ環の表現から組みひも群の表現と部分因子環を構成している．

3.3　指数の一般化

II_1 型因子環の部分因子環の指数の概念を，より一般の v. N. 環や C^* 環に拡張する試みは，Pimsner-Popa [13]，幸崎 [11]，綿谷 [15] らによってなされている．これらの研究により，指数において本質的なのは II_1 型因子環ではなく，むしろ条件つき期待値の存在であることがわかっている．

定理 3.4 (Pimsner-Popa)　$\mathcal{M}$ を II_1 型因子環，$\mathcal{N}$ を $\mathcal{M}$ の指数有限な部分因子環とする．このとき次が成り立つ：

(1)　次の **Pimsner-Popa 不等式**が成り立つ：

$$[\mathcal{M}:\mathcal{N}] = \inf\left\{c>0\,;\, E_{\mathcal{N}}(A) \geq \frac{1}{c}A,\ \forall A\in\mathcal{M}_+\right\}$$
$$= \inf\left\{c>0\,;\, \|E_{\mathcal{N}}(A)\| \geq \frac{1}{c}\|A\|,\ \forall A\in\mathcal{M}_+\right\}.$$

(2)　$\mathcal{M}$ の有限個の元 $m_1, m_2, \cdots, m_n$ (**Pimsner-Popa 基底**と呼ばれる) が存在して，任意の $A\in\mathcal{M}$ に対して等式

$$A = \sum_{i=1}^n m_i E_{\mathcal{N}}(m_i^* A) = \sum_{i=1}^n E_{\mathcal{N}}(A m_i) m_i^*$$

が成り立つ．さらにこのとき，$\{m_i\}_{i=1}^n$ の選び方によらずに等式

$$[\mathcal{M}:\mathcal{N}]1 = \sum_{i=1}^n m_i m_i^*$$

が成り立つ．

上の性質 (1), (2) は一般の C^* 環の間の条件つき期待値 $E:\mathcal{A}\to\mathcal{B}$ に対しても意味を持つ．実際 Pimsner-Popa は (1) の右辺の定数で E の指数 $\mathrm{Ind}_p E\in\mathbb{R}_+$ を，綿谷は (2) の条件をみたす $\{m_i\}_{i=1}^n$ の存在を仮定して，(2) の第2式で E の指数 $\mathrm{Ind}_w E\in\mathcal{Z}(\mathcal{A})$ を定義した．$\mathcal{A}$ と $\mathcal{B}$ が因子環や単純 C^* 環であるとき，これらの定義から出発しても定理 3.2 と同様な結果が得られる．

この節の最後に，セクター理論と $\mathrm{Ind}_w E$ を結ぶ補題を述べる．

補題 3.5　$\mathcal{A}$ を C^* 環，$\rho, \overline{\rho}$ を $\mathcal{A}$ の自己準同型とし，$\mathcal{A}$ の等長作用素 V, W で次をみたすものが存在するとする：

$$VA = \rho\cdot\overline{\rho}(A)V,\quad WA = \overline{\rho}\cdot\rho(A)W,\quad \forall A\in\mathcal{A},$$

$$V^*\rho(W) = W^*\overline{\rho}(V) = \frac{1}{d}.$$

ここで d は正の定数である．$\mathcal{A}$ から $\mathcal{A}$ への線型写像 E_ρ, $E_{\overline{\rho}}$ を次のように定める：

$$E_\rho(A) = \rho(W^*\overline{\rho}(A)W), \quad E_{\overline{\rho}}(A) = \overline{\rho}(V^*\rho(A)V), \quad A \in \mathcal{A}.$$

このとき次が成り立つ：

(1)　E_ρ と $E_{\overline{\rho}}$ はそれぞれ $\rho(\mathcal{A})$ と $\overline{\rho}(\mathcal{A})$ への条件つき期待値である．

(2)　$\{dV^*\}$ と $\{dW^*\}$ はそれぞれ E_ρ と $E_{\overline{\rho}}$ の Pimsner-Popa 基底であり，$\mathrm{Ind}_w E_\rho = \mathrm{Ind}_w E_{\overline{\rho}} = d^2$ が成り立つ．

4°　代数的場の量子論

さて，もう一つの本題である代数的場の量子論の話に移ろう．

4.1　局所観測可能量の C^* 環

ここでは4次元ミンコフスキー空間の相対論的量子系の観測可能量の生成する C^* 環のみたすべき条件を考察する．以下，V_+ で正の時間的ベクトル全体（開未来錐）を表す．

物理量の観測は限られた空間で有限時間内に行うので，観測可能量としては，時空の有界領域内のものを考える．$\mathcal{O}(D)$ を有界領域 D の観測可能量全体とする．量子力学の要請により，観測可能量はヒルベルト空間上の自己共役作用素である．また必要ならば，非有界作用素の代わりにはその有界な関数を考えることにより，考える観測可能量はすべて有界作用素としてよい．$\mathcal{O}(D)$ の生成する C^* 環を $\mathfrak{A}(D)$ として，$\mathfrak{A}(D)$ に次の数学的要請を行う．

(1)　$D_1 \supset D_2$ ならば $\mathfrak{A}(D_1) \supset \mathfrak{A}(D_2)$. これは D_2 内の観測可能量は D_2 より大きな領域 D_1 でも観測可能なので，当然の仮定である．時空内の有界領域全体は包含関係に関して有向族になっているので，$\{\mathfrak{A}(D)\}_D$ は C^* 環の帰納系になる．この帰納的極限のノルムによる完備化を $\mathfrak{A}$ と書く．

(2)　G を非斉次ローレンツ群の単位元の連結成分 $\mathbb{R}^4 \rtimes SO(1,3)_0$ とする．このとき G の $\mathfrak{A}$ への作用 α が存在して，任意の有界領域 D と任意の $g \in G$ に対して $\alpha_g(\mathfrak{A}(D)) = \mathfrak{A}(gD)$ が成り立つ．これは相対論的対称性からの要請である．

(3)　D_1 と D_2 が空間的ならば，$\mathfrak{A}(D_1)$ と $\mathfrak{A}(D_2)$ は交換する．これは互いに空間的な2点間の情報の伝播がないという，相対論的因果律に基づく要請である．

ここでさらに，$\mathfrak{A}$ の真空状態 ω の存在を仮定する (真空状態の一般的な定義については [1, 6] を参照)．$\mathfrak{A}$ の状態 ω が，G の時空の並進部分で不変だとすると，定理2.7から $\mathbb{R}^4$ の $\mathcal{H}_\omega$ 上の表現 U_ω が定まり，それからエネルギー運動量作用素が定まる．ここではそのスペクトルが未来錐 V_+ の閉包に含まれると仮定する．このような仮定の下で荒木は次の定理を示した [1, 6].

定理 4.1　$\pi_\omega(\mathfrak{A})'$ は可換であり，U_ω の並進部分は $\pi_{\omega_0}(\mathfrak{A})'$ と交換する．さらに，次の条件は同値である．

(1)　すべての D に対して $\pi_\omega(\mathfrak{A}(D))''$ は因子環である．

(2)　ω は純粋状態である (定理2.6よりこれはさらに $(\pi_\omega, \mathcal{H}_\omega)$ が既約であることと同値).

(3)　$\mathcal{H}_\omega$ の並進不変ベクトルは Ω_ω のスカラー倍のみである．

この定理から，直積分分解を行うことにより真空状態の問題は純粋真空状態の問題に帰着されることがわかるので，以下 ω は純粋状態であること

も仮定する．このとき上の定理より $\pi_\omega(\mathfrak{A}(D))''$ は因子環になるのだが，多くの場合それは III 型であることが知られている．

以後 $\mathfrak{A}$ の物理的に意味がある表現として，各有界領域 D に対して $\mathfrak{A}(D)$ に制限すれば π_ω とユニタリ同値であるもののみを考える．その物理的理由は通常次のように説明される (月のかなたの議論)．たとえば我々の物理系が保存電荷を持つとする．このとき電荷の総数は任意の観測可能量と可換である．よって，既約表現をほどこすと電荷の総数は定数になる．逆に言えば，電荷の総数が異なる状態に対応する表現はユニタリ同値になり得ない．いま簡単のために，$\mathfrak{A}$ の物理的に意味がある既約表現は，電荷の総数で決定されると仮定する．ここで電荷の総数が N である状態と，月のかなたに電子が余分に一つ多く存在して電荷の総数が $N-1$ である状態を考えると，これらから決まる表現はユニタリ同値にはならない．しかしながら，地球上の短い時間内での物理を記述する上では，これらの状態は区別できない．このことから電荷の総数の異なる表現も，$\mathfrak{A}(D)$ に制限すればユニタリ同値になると仮定してよいはずである．

$\mathfrak{A}$ の表現として上のようなもののみを考える場合，$\mathfrak{A}(D)$ を $\pi_\omega(\mathfrak{A}(D))''$ に，$\mathfrak{A}$ を $\bigcup_D \pi_{\omega_0}(\mathfrak{A}(D))''$ のノルムでの完備化にそれぞれ置き換えても問題はない．ただしこうした場合，$\mathfrak{A}$ の物理的に意味のある表現として，各有界領域 D に対して $\mathfrak{A}(D)$ への制限が正規表現になっているものを考える必要がある．以後このような置き換えを行って，記号 π_ω を省略し，$\mathcal{H}_\omega$, Ω_ω, U_ω の代わりに $\mathcal{H}_0$, Ω_0, U_0 を使うことにする．$\mathfrak{A}$ の定義表現と Ω_0 はそれぞれ，真空表現，真空ベクトルと呼ばれる．

4.2　局在自己準同型

Doplicher-Haag-Roberts の超選択則の議論に入ろう [3]. 数学的に言えば $\mathfrak{A}$ の表現論である.

x, y を時空の点として, $(x+V_+)\cap(y-V_+)$ の形の領域を**二重錐**と呼ぶ. 以後, 技術的な理由により, 有界領域としては二重錐のみを考える. O が一般の領域の場合は, O に含まれるすべての二重錐 D を考え, $\mathfrak{A}(D)$ から生成される C^* 環を $\mathfrak{A}(O)$ とする. また, O のすべての点と空間的な点全体とを O' と書く. 以下, 次のような仮定を設ける.

(1)　すべての二重錐 D に対して, $\mathfrak{A}(D)=\mathfrak{A}(D')'$ が成り立つ.

(2)　O を $x+V_+$ の閉包を含む領域とし, $P\in\mathfrak{A}(x+V_+)$ を 0 でない直交射影作用素とすると, $W^*W=1, WW^*=P$ をみたす $W\in\mathfrak{A}(O)$ が存在する.

(1) は Haag の因果的双対性と呼ばれ, 自由場などでは成立することが証明されている. (2) は Borchers の性質 B と呼ばれ, $\mathfrak{A}(D)$ が III 型因子環であればつねに成立する.

$\mathfrak{A}$ の状態の中で物理的に意味のあるものを選び出すため, DHR は次の判定条件を提唱した.

定義 4.2 (DHR 判定条件)　$(\pi, \mathcal{H}_\pi)$ を $\mathfrak{A}$ の表現とする.

(1)　D を二重錐とし, π の $\mathfrak{A}(D')$ への制限が真空表現の $\mathfrak{A}(D')$ への制限とユニタリ同値であるとき, $(\pi, \mathcal{H}_\pi)$ は D に**局在**するという. ある二重錐 D に局在する表現を**局在表現**という.

(2)　二重錐 D が存在して, $(\pi, \mathcal{H}_\pi)$ が任意の $x\in\mathbb{R}^4$ に対して $x+D$ に局在するとき, $(\pi, \mathcal{H}_\pi)$ は**移動可能**であるという.

いま, $(\pi, \mathcal{H}_\pi)$ を移動可能な D に局在した表現であるとする. このとき定義より, $\mathcal{H}_0$ から $\mathcal{H}_\pi$ へのユニタリ作用素 V が存在して $VA=\pi(A)V, \forall A\in$

$\mathfrak{A}(D')$, が成り立つ．この V を使って $A \in \mathfrak{A}$ に対して $\rho(A) = V^*\pi(A)V$ と定めると，$(\rho, \mathcal{H}_0)$ は $(\pi, \mathcal{H}_\pi)$ とユニタリ同値な表現で，任意の $A \in \mathfrak{A}(D')$ に対して $\rho(A) = A$ が成り立つ．ここで Haag の双対性を使うと

$$\rho(\mathfrak{A}(D)) \subset \rho(\mathfrak{A}(D'))' = \mathfrak{A}(D')' = \mathfrak{A}(D)$$

となる．これが D を含む任意の二重錐についても成り立つので，ρ は $\mathfrak{A}$ の自己準同型であることがわかる．

このように，ある二重錐 D に対して $\rho|_{\mathfrak{A}(D')} = \mathrm{Id}|_{\mathfrak{A}(D')}$ をみたす $\mathfrak{A}$ の準同型を**局在準同型**という．ρ_1 と ρ_2 がそれぞれ D_1 と D_2 に局在した $\mathfrak{A}$ の準同型で，$\mathfrak{A}$ の表現としてユニタリ同値であるものとする．このとき $\mathcal{H}_0$ のユニタリ作用素 W が存在して，すべての $A \in \mathfrak{A}$ に対して $\rho_1(A) = W\rho_2(A)W^*$ をみたす．D_3 を D_1 と D_2 を含む二重錐とすると，$\rho_1|_{\mathfrak{A}(D_3')} = \rho_2|_{\mathfrak{A}(D_3')} = \mathrm{Id}|_{\mathfrak{A}(D_3')}$ なので $W \in \mathfrak{A}(D_3')' = \mathfrak{A}(D_3)$ となる．このように表現のユニタリ同値性は，ρ_1 と ρ_2 の違いが，$\mathfrak{A}$ の内部自己同型 $\mathrm{Ad}(W)(A) = WAW^*$ で与えられることに翻訳されるので，以後このような ρ_1 と ρ_2 は同値であると言うことにする．局在表現の移動可能性も容易に局在自己準同型の条件に翻訳することが可能である．

Δ_t を $\mathfrak{A}$ の移動可能局在準同型全体とし，Δ_t^{irr} を Δ_t の中で既約なもの全体とする．我々の関心事は，Δ_t^{irr} を同値関係で割った集合の構造である．$\rho \in \Delta_t$ の同値類を以後 $[\rho]$ と書き，**セクター**と呼ぶ．定義より比較的簡単に得られる Δ_t の性質をまとめよう．

(1)　$\rho_1, \rho_2 \in \Delta_t$ ならば，合成 $\rho_1 \cdot \rho_2$ も Δ_t に属する．

(2)　$\rho_1, \rho_2 \in \Delta_t$ が局在している領域が互いに空間的ならば，$\rho_1 \cdot \rho_2 = \rho_2 \cdot \rho_1$ が成り立つ．特に移動可能性より，任意の $\sigma_1, \sigma_2 \in \Delta_t$ について $[\sigma_1 \cdot \sigma_2] = [\sigma_2 \cdot \sigma_1]$ が成り立つ．

(3)　DHR 判定条件をみたす表現の直和はまた DHR 判定条件をみたすので，$\Delta_t/\sim$ にも直和の構造が入る．

(4)　DHR 判定条件をみたす表現の部分表現はまた DHR 判定条件をみたすので，$\Delta_t/\sim$ の元の部分セクターという概念が意味を持つ.

ここで注目すべきは，(1) と (2) の性質である．群の表現の場合と違って，一般に C^* 環の二つの表現のテンソル積は意味を持たない．しかしながら (1) と (2) は，Δ_t の元の合成が，群の表現のテンソル積に似た性質を持つことを示している．実際 Δ_t は，群の表現の抽象化であるテンソル圏と呼ばれるものになっているのである.

4.3　素粒子の統計と指数

さて，DHR 理論の醍醐味である，Δ_t から自然に素粒子のパラボーズ統計とパラフェルミ統計を導く部分を見ていこう．これらは対称群 $\mathfrak{S}_n$ の表現としてとらえられ，恒等表現の場合が通常のボーズ統計，符号表現のときが通常のフェルミ統計だと考えられる.

$\rho_1, \rho_2 \in \Delta_t$ とし，D_1, D_2 が互いに空間的な二重錐とする．ρ_1 と ρ_2 は移動可能なので，$\mathfrak{A}$ のユニタリ作用素 V_1, V_2 で $\hat{\rho_1} = \mathrm{Ad}(V_1)\cdot\rho_1$ と $\hat{\rho_2} = \mathrm{Ad}(V_1)\cdot\rho_2$ がそれぞれ D_1 と D_2 に局在するものが存在する．$\hat{\rho_1}$ と $\hat{\rho_2}$ は交換するので，

$$\mathrm{Ad}(V_1\rho_1(V_2))\cdot\rho_1\cdot\rho_2 = \mathrm{Ad}(V_2\rho_2(V_1))\cdot\rho_2\cdot\rho_1$$

が成り立つ．ここで

$$\mathcal{E}(\rho_1, \rho_2) = \rho_2(V_1^*)V_2^*V_1\rho_1(V_2)$$

と定めると，$\rho_2\cdot\rho_1 = \mathrm{Ad}(\mathcal{E}(\rho_1,\rho_2))\cdot\rho_1\cdot\rho_2$ が成り立つ．$\rho \in \Delta_t$ の統計作用素 $\mathcal{E}_\rho$ を $\mathcal{E}(\rho,\rho)$ と定めると，$\mathcal{E}_\rho \in \mathfrak{A}(D)\cap\rho^2(\mathfrak{A})'$ となる.

定理 4.3 (DHR)　$\mathcal{E}_\rho$ は ρ のみによって定まり (つまり上の D_1, D_2 や V_1, V_2 の選び方にはよらない)，$\mathcal{E}_\rho^2 = 1$ をみたす.

$\rho_1, \rho_2, \cdots, \rho_n \in \Delta_t$ とし，$\mathfrak{S}_n$ を n 次の対称群とする．上と同様な議論により，$\sigma \in \mathfrak{S}_n$ に対して $\mathfrak{A}$ のユニタリ作用素 $\mathcal{E}(\rho_1, \rho_2, \cdots, \rho_n)(\sigma)$ で

$$\mathrm{Ad}(\mathcal{E}(\rho_1, \rho_2, \cdots, \rho_n)(\sigma)) \cdot \rho_1 \cdot \rho_2 \cdots \rho_n = \rho_{\sigma^{-1}(1)} \cdot \rho_{\sigma^{-1}(2)} \cdots \rho_{\sigma^{-1}(n)}$$

をみたすものを定めることができる．$\mathcal{E}(\rho, \rho, \cdots, \rho)(\sigma)$ を $\mathcal{E}_\rho^{(n)}(\sigma)$ と書く．

定理 4.4 (DHR)　$\mathfrak{S}_n \ni \sigma \mapsto \mathcal{E}_\rho^{(n)}(\sigma) \in \mathfrak{A} \cap \rho^n(\mathfrak{A})'$ は $\mathfrak{S}_n$ のユニタリ表現である．特に次が成り立つ．

$$\mathcal{E}_\rho^{(n)}((i, i+1)) = \rho^{i-1}(\mathcal{E}_\rho).$$

$$\mathcal{E}_\rho \rho(\mathcal{E}_\rho) \mathcal{E}_\rho = \rho(\mathcal{E}_\rho) \mathcal{E}_\rho \rho(\mathcal{E}_\rho). \qquad (\star)$$

$$\rho^i(\mathcal{E}_\rho) \rho^j(\mathcal{E}_\rho) = \rho^j(\mathcal{E}_\rho) \rho^i(\mathcal{E}_\rho), \quad |i-j| \geq 2. \qquad (\star\star)$$

この対称群の表現を決定するために，DHR は ρ の左逆写像を使った巧妙な議論を行っている．ここでとても興味深いのは，この議論と Jones の定理 3.2 の証明の議論の間に，かなりの類似点があることである．

定義 4.5　ρ を C^* 環 $\mathcal{A}$ の自己準同型とする．線型写像 $\phi : \mathcal{A} \to \mathcal{A}$ が次の条件をみたすとき，ϕ は ρ の**左逆写像**であるという．

(1)　$\phi(\mathcal{A}_+) \subset \mathcal{A}_+$.

(2)　$\phi(\rho(A) B \rho(C)) = A \phi(B) C \ \ (\forall A, B, C \in \mathcal{A})$.

(3)　$\phi(1) = 1$.

DHR は $\rho \in \Delta_t$ の移動可能性をうまく使った議論により，左逆写像 ϕ の存在を示している．左逆写像の性質 (2) と，$\mathcal{E}_\rho \in \mathfrak{A} \cap \rho^2(\mathfrak{A})'$ から，$\phi(\mathcal{E}_\rho) \in \mathfrak{A} \cap \rho(\mathfrak{A})'$ であることがわかる．特に $\rho \in \Delta_t^{irr}$ のときには，$\phi(\mathcal{E}_\rho)$ はスカラーであり，これを λ_ρ と書いて統計パラメータと呼ぶ．

定理 4.6 (DHR)　$\rho \in \Delta_t^{irr}$ として $\lambda_\rho \neq 0$ と仮定する．このとき次が成立する．

(1)　不等式 $||\phi(A)|| \geq |\lambda_\rho|^2||A||$ がすべての $A \in \mathfrak{A}_+$ に対して成り立つ．

(2)　ϕ は ρ の唯一の左逆写像であり，その $\mathfrak{A}(D)$ への制限は正規である．

(3)　自然数 d_ρ（統計次元）が存在して $\lambda_\rho = \pm\frac{1}{d_\rho}$ となる．

(4)　$\phi^n(\mathcal{E}_\rho^{(n)}(\sigma))$ は $\mathfrak{S}_n$ の指標を与え，その値は λ_ρ により完全に決まる．表現 $\mathcal{E}_\rho^{(n)}$ は，重複度を無視すればこの指標を持つ表現と同値である．

さらに，

(5)　$\lambda_\rho = \frac{1}{d_\rho}$ のとき，$\mathcal{E}_\rho^{(n)}$ に対応するヤング図形は列の長さが d_ρ 以下のものすべてである (パラボーズ統計)．

(6)　$\lambda_\rho = -\frac{1}{d_\rho}$ のとき，$\mathcal{E}_\rho^{(n)}$ に対応するヤング図形は行の長さが d_ρ 以下のものすべてである (パラフェルミ統計)．

状態 $\omega \cdot \phi$ の GNS 表現は，DHR 判定条件をみたす既約表現であることがわかるので，これに対応する Δ_t^{irr} の元の一つを $\overline{\rho}$ と書くことにし，$[\overline{\rho}]$ を $[\rho]$ の共役セクターと呼ぶ．このとき $\overline{\rho} \in \Delta_t^{irr}$ は次の条件で特徴づけられる．

定理 4.7 (DHR)　$\rho \in \Delta_t^{irr}$ とし，$\overline{\rho}$ は上の議論で与えられるものとする．このとき等長作用素 $R, \overline{R} \in \mathfrak{A}$ で

$$\overline{R}A = \rho \cdot \overline{\rho}(A)\overline{R}, \quad RA = \overline{\rho} \cdot \rho(A)R, \quad A \in \mathfrak{A},$$

$$\overline{R}^* \rho(R) = R^* \overline{\rho}(\overline{R}) = \frac{1}{d_\rho}$$

をみたすものが存在する．

1980年代後半に，Longo は $E_\rho = \rho \cdot \phi$ が $\mathfrak{A}$ から ρ の像への条件つき期待値であり，定理 4.6 の (1) の不等式は Pimsner-Popa 不等式に他ならないことを指摘した．実際，補題 3.5 と定理 4.7 から統計次元 d_ρ の 2 乗は E_ρ の指数 $\mathrm{Ind}_w E_\rho$ に他ならないこともわかる．

4.4 組みひも統計

最後に，時空が 2 次元の場合に何が起こるかを考えよう．実は定理 4.3 の証明は，二重錐 D_1 と D_2，$\hat{D}_1$ と $\hat{D}_2$ がそれぞれ空間的であるときに，空間的な位置関係を保ちながら D_1 を $\hat{D}_1$ に，D_2 を $\hat{D}_2$ に連続的に変形できるという事実に基づいている．しかし 2 次元のミンコフスキー空間においてはこの事実は成り立たない．(D_1 と D_2 の空間座標の大小関係を，連続変形により逆転できない！) このため統計作用素を定義する際，D_1 と D_2 の空間座標の大小関係によって異なる 2 種類の統計作用素 $\mathcal{E}_\rho^{(+)}$ と $\mathcal{E}_\rho^{(-)}$ が生じる．この結果 $(\mathcal{E}_\rho^{(\pm)})^2 = 1$ はもはや成り立たなくなるのである．しかし定理 4.4 の $(\star)$ と $(\star\star)$ は依然として成り立ち，対称群の表現の代わりに組みひも群の表現を得る．統計パラメータ λ_ρ もはや実数でなくなる．$\lambda_\rho \neq 0$ のときに その絶対値の逆数を d_ρ (統計次元)，位相を ω_ρ (統計位相) と定める．d_ρ は整数とは限らない．

定理 4.8　時空の次元を 2 次元とし，ϕ を $\rho \in \Delta_t^{irr}$ の左逆写像として，$\lambda_\rho \neq 0$ と仮定する．このとき次が成立する．

(1)　不等式 $\|\phi(A)\| \geq |\lambda_\rho|^2 \|A\|$ がすべての $A \in \mathfrak{A}_+$ に対して成り立つ．

(2)　ϕ は ρ の唯一の左逆写像であり，その $\mathfrak{A}(D)$ への制限は正規である．

(3)　$E_\rho = \rho \cdot \phi_\rho : \mathfrak{A} \to \rho(\mathfrak{A})$ は条件つき期待値で $\mathrm{Ind}_w E_\rho = d_\rho^2$ が成り立つ．特に

$$d_\rho \in \left\{ 2\cos\frac{\pi}{N}\,;\, N = 3, 4, \cdots \right\} \cup [2, \infty).$$

(4) $b_i = \rho^{i-1}(\mathcal{E}_\rho)$ とおくと，$\{b_i\}_{i=1}^{n-1}$ は組みひも群 B_n の表現を生成し，ϕ^n は B_n の群環のマルコフトレースになる．

具体的なモデルとして，共形場理論の一つである $SU(N)$-WZW モデルを考えると，統計作用素として Wenzl [16] が構成した組みひも群の表現が現れる [5, 14]．さらに，このとき ω_ρ は共形次元と呼ばれる量を与えるのである．

参考文献

[1] 荒木不二洋，量子場の数理，岩波書店，1996.

[2] A. Connes, *Noncommutative Geometry.* Academic Press, Inc., San Diego, CA, 1994.

[3] S. Doplicher, R. Haag and J. E. Roberts, Local observables and particle statistics. I, II. *Comm. Math. Phys.* **23** (1971), 199–230, **35** (1974), 49–85.

[4] D. E. Evans and Y. Kawahigashi, *Quantum Symmetries on Operator Algebras.* Oxford Mathematical Monographs. Oxford Science Publications. The Clarendon Press, Oxford University Press, New York, 1998.

[5] K. Fredenhagen, K.-H. Rehren and B. Schroer, Superselection sectors with braid group statistics and exchange algebras. I. General theory. *Comm. Math. Phys.* **125** (1989), 201–226.

[6] R. Haag, *Local Quantum Physics. Fields, Particles, Algebras.* Texts and Monographs in Physics. Springer-Verlag, Berlin, 1992.

[7] V. F. R. Jones, Index for subfactors. *Invent. Math.* **72** (1983), 1-25.

[8] V. F. R. Jones, A polynomial invariant for knots via von Neumann algebras. *Bull. Amer. Math. Soc.* (N.S.) **12** (1985), 103–111

[9] 河東泰之，代数的場の量子論の新しい展開—セクター理論と braid 統計，数理科学 NO. 454, 2001.

[10] Y. Kawahigashi and R. Longo, *Classification of local conformal nets. case $c < 1$.* Preprint, math-ph/0201015.

[11] H. Kosaki, Extension of Jones' theory on index to arbitrary factors. *J. Funct. Anal.* **66** (1986), 123–140.

[12] R. Longo, Index of subfactors and statistics of quantum fields I, II. *Comm. Math. Phys.* **126** (1989), 217–247 and **130** (1990), 285–309.

[13] M. Pimsner and S. Popa, Entropy and index for subfactors. *Ann. Sci. École Norm. Sup.* (4) **19** (1986), 57–106.

[14] A. Wassermann, Operator algebras and conformal field theory. III. Fusion of positive energy representations of LSU(N) using bounded operators. *Invent. Math.* **133** (1998), 467–538.

[15] Y. Watatani, *Index for C^*-subalgebras.* Mem. Amer. Math. Soc. **83** (1990), no. 424.

[16] H. Wenzl, Hecke algebras of type A_n and subfactors. *Invent. Math.* **92** (1988), 349–383.

第5話

非可換幾何学と指数定理

森吉仁志

0° はじめに

最近数学だけでなく物理学においても,「非可換幾何学」という言葉を多くの分野において耳にするようになった．非可換幾何学とは何であろうか．それは1980年代後半から90年代にかけてA. Connesにより提唱された幾何学の新しい枠組である．この枠組は微分幾何学・位相幾何学・作用素環論・エルゴード理論・大域解析学などの分野に大きな刺激を与えており，さらには弦理論などの理論物理学の分野においても現在その応用が活発に研究されつつある．内容について標語的に述べると，可換な対象を非可換な対象に拡げて構築された幾何学が非可換幾何学だということになろう．

本稿では，可換世界を非可換世界に拡げてゆく動機や必然性について，また逆に非可換な対象を可換な対象に戻すことで見えてくる非可換世界の幾何描像について解説を行う．可換世界と非可換世界が結びついた現象は，物理学における量子化問題などを好例として，さまざまな衣装をまとって数学や物理学に現れてくる．ここではとくに「指数定理」を題材として，可換世界と非可換世界がどのように結びついているかについて述べてゆきたい．以下では実例を用いながら，わかりやすい形で説明を重ねていくことを心がけた．さらに詳細に非可換幾何学について知りたい読者には，続けてConnes [9] [1] を参照されることを強くお勧めする．

[1] 浩瀚（こうかん）ではあるが，定義・命題・証明が続くいわゆる本格的な数学の教科書ではない．初等的入門書でもないが，他分野の数学・物理学研究者に対して非可換幾何学の内容を紹介することを意図しており，非可換幾何学を提起した第一人者の深い洞察と

1° 可換世界から非可換世界へ

空間（図形）を研究することが幾何学の第一義である．目標がはっきりしているならば，どのような手段を用いたところでそれをやはり幾何学とよんで構わないだろう．空間を直接に調べるのではなく，これを代数的な対象に置き換えて研究することによりもとの空間の性質を論ずるという方法は殊更に新しいものではなく，すでに代数幾何学などにおいては基礎理念と化している考え方である．微分幾何学において，空間を構成する点を直接に扱うのではなく，空間上の関数・微分型式・ベクトル場などの対象を扱うという手法もまたこの理念に沿った方針であると言えよう．空間を代数的対象に置き換える方法は簡明である．一言で言うと，空間上の関数全体のなす環を考えるのである．たとえば局所コンパクトハウスドルフ空間 X が与えられたとする．ここで，無限遠点で 0 となる X 上の連続関数全体の集合を $C_o(X)$ と表す．このとき $C_o(X)$ 上において，各点ごとに値の和や積をとって関数の和や積を定める．さらに最大値ノルムを考えると位相が定まる．こうして $C_o(X)$ は C^* 環とよばれる位相をもつ $\mathbb{C}$ 上の環となる．逆に可換な C^* 環が与えられたとき，その極大イデアル全体の集合が局所コンパクトハウスドルフ空間となり，これがもとの空間 X と同相になる．この対応は可逆であることが確かめられる．したがって，このことから，可換な C^* 環という対象を考えることと，局所コンパクトハウスドルフ性をもつ空間を考えることが数学的には同等となる．

{ 局所コンパクトハウスドルフ空間 } $\rightleftarrows$ { 可換 C^* 環 }

空間の代わりに可換 C^* 環という対象を考えても原理的には同じことなのである．

問題意識を伺うことができる．手元において何度も読み返し，ゆっくりと理解を深めるべき本であろう．

では，このとき取り上げる対象を可換 C^* 環から（可換をも含めた）非可換な C^* 環へ拡張したならばどうであろうか．非可換な C^* 環を考えることで，空間の幾何学を拡張した何か新しい枠組が現れてくるのだろうか．このような観点から構築されつつある幾何学の新しい枠組のことを，我々はまさに**非可換幾何学**とよぶ．本節では非可換幾何学の対象となる非可換 C^* 環の実例を興味深いいくつかの例に即して説明してゆく．

1.1　$\mathbb{R}^2$ の正準量子化

まずは簡単な空間である $\mathbb{R}^2$ を例にとって，それからいくつかの方法で非可換 C^* 環を構成しよう．多様体 $\mathbb{R}^2 = \{(q,p)\,|\,q,p \in \mathbb{R}\}$ において "量子化" を行えば，$\mathbb{R}^2$ 上の関数 f に対して量子化作用素 $\hat{f}$ が定まる．とくに q,p を $\mathbb{R}^2$ 上の関数とみて量子化作用素 $\hat{q},\hat{p}$ を対応させたとき，そこではハイゼンベルグの正準交換関係

$$[\hat{q},\hat{p}] = i\hbar I \qquad (\hbar > 0)$$

が成り立っていることを要請する．これがいわゆる正準量子化である．このような量子化作用素たちをワイルのやり方に従って構成してみよう．まず $C_o(\mathbb{R}^2)$ により無限遠点で 0 となる $\mathbb{R}^2$ 上の連続関数の全体を表す．このときフーリエ反転公式により，$f \in C_o(\mathbb{R}^2)$ は

$$f(q,p) = \int dxdy\,\varphi(x,y)e^{i(xq+yp)}$$

と表される．ここで φ は f のフーリエ変換である．いま $x,y \in \mathbb{R}$ を固定して q,p の関数とみた $e^{i(xq+yp)}$ を掛け算して得られるユニタリ作用素を $V_{(x,y)}$ とおく．すると，$V_{(x,y)}$ が量子化されるならば，その線型和（正確には積分）として関数 f が量子化されることがわかる．ここで $L^2(\mathbb{R})$ 上の作用素 $W_{(x,y)}$ を以下のように定めて，これを $e^{i(xq+yp)}$ の量子化された作用

素と考えることにする：

$$W_{(x,y)} = e^{i(xt+y\hbar\frac{1}{i}\frac{d}{dt})}.$$

ただし，$L^2(\mathbb{R})$ に属する関数の変数を t で表した．いま $[t, \frac{1}{i}\frac{d}{dt}] = iI$ という関係式があるから，これを用いて変形すれば，

$$W_{(x,y)} = e^{i(xt+y\hbar\frac{1}{i}\frac{d}{dt})} = e^{\frac{i}{2}\hbar xy}e^{ixt}e^{iy\hbar\frac{1}{i}\frac{d}{dt}} = e^{\frac{i}{2}\hbar xy}V_x U_{\hbar y}$$

を得る．ここで V_x は e^{ixt} による掛け算作用素を，$U_{\hbar y}$ は $\hbar y \in \mathbb{R}$ だけの平行移動が引き起こす $L^2(\mathbb{R})$ 上のユニタリ作用素を表す．したがって，$f \in C_o(\mathbb{R}^2)$ の量子化作用素 $\hat{f}$ は

$$\hat{f} = \int dxdy\,\varphi(x,y)e^{\frac{i}{2}\hbar xy}V_x U_{\hbar y}$$

と表現される．ここではフーリエ反転公式を用いて，無限遠点で0となる関数に対してのみその量子化作用素を定めたが，さらに擬微分作用素を用いるとこの定義は無限遠点で0とはならない関数にも拡張される．それを一般に**ワイル量子化**とよび，そこでは正準交換関係の要請が満たされている．このことは

$$[\hat{q},\hat{p}] = \left.\frac{\partial^2}{\partial x\partial y}\right|_{x=y=0} \widehat{e^{ixq}}\,\widehat{e^{iyp}}\,\widehat{e^{ixq}}^{-1}\,\widehat{e^{iyp}}^{-1} = \left.\frac{\partial^2}{\partial x\partial y}\right|_{x=y=0} e^{i\hbar xy} = i\hbar I$$

からも了解されるであろう．

また，次のような量子化の手続きも考えられる．上と同様に $f \in C_o(\mathbb{R}^2)$ を $f(q,p) = \int dxdy\,\varphi(x,y)e^{i(xq+yp)}$ と表しておく．そして $e^{i(xq+yp)} = e^{ixq}e^{iyp}$ とみて，e^{ixq}, e^{iyp} のそれぞれの量子化を V_x, $U_{\hbar y}$ と定めておき，$f \in C_o(\mathbb{R}^2)$ の量子化作用素 $\hat{f}$ を

$$\hat{f} = \int dxdy\,\varphi(x,y)V_x U_{\hbar y}$$

と与えることもできる．定義から容易に確かめられるように，これは表象を f とする擬微分作用素そのものである．したがって，擬微分作用素を用いる量子化の手続きも存在することがわかる．

さて，これらの量子化作用素の生成する C^* 環はどのようなものになっているのであろうか．答えから先に言えば，ワイル量子化あるいは擬微分作用素を用いる量子化のどちらにおいても，量子化作用素の生成する C^* 環はコンパクト作用素の全体のなす C^* 環 $\mathcal{K}$ に同型となる．以下ではこの C^* 環を接合積の形で表現してみよう．接合積とは群 G の作用する C^* 環 A を係数とする G の群環であると言っておく．まずは $G = \mathbb{R}$ が $\mathbb{R}$ 自身に平行移動で作用している状況を考える．このとき $A = C_o(\mathbb{R})$ には $G = \mathbb{R}$ の各元が C^* 環の同型写像として自然に作用している．すなわち $t \in G$, $a \in A$ に対して，$t(a) \in A$ を $t(a)(x) = a(x+t)$ $(x \in \mathbb{R})$ と定めれば，これが A の同型写像を与える．ここで A および G の元がヒルベルト空間 $L^2(\mathbb{R})$ にそれぞれ掛け算作用素および平行移動で作用しているとして，$a \in A$ による掛け算作用素を V_a と表し，$t \in \mathbb{R}$ だけの平行移動が定める $L^2(\mathbb{R})$ 上のユニタリ作用素を U_t で表す．そしてこれらの作用素 V_a と U_t の生成する C^* 環を接合積と定義したい．実は G が離散群であれば，これが接合積の定義そのものであるが，いま G にはリー群としての位相が与えられているので，このままでは正しくない．しかしその定義の修正を述べる前に，こう考えたときその作用素がどのように表現されるかを考えてみよう．いま $\xi \in L^2(\mathbb{R})$ をとったとき，

$$(V_a U_t \xi)(x) = a(x)t(\xi)(x) = a(x)\xi(x+t)$$

となるから，

$$\begin{aligned}(V_a U_t V_b U_s \xi)(x) &= a(x)(V_b U_s \xi)(x+t) \\ &= a(x)b(x+t)\xi(x+t+s) \\ &= (V_{at(b)} U_{t+s} \xi)(x)\end{aligned}$$

である．とくに $U_t V_a U_t^{-1} = V_{t(a)}$ が成り立つから，V_a, U_t たちは可換でない．ここで V_a を単に a と記せば，接合積 $A \rtimes G$ とは，$\{aU_t \,|\, a \in A, t \in G\}$

により生成される C^* 環で，そこにおける積が

$$aU_t bU_s = at(b)U_{s+t}$$

で与えられるものと言うことができる．これは A を係数とする G の群環の積とよんでよいであろう．さらに一般に，$a = \sum_{t\in\mathbb{R}} a_t U_t$，$b = \sum_{s\in\mathbb{R}} b_s U_s$ に対してその積は $ab = \sum a_t t(b_s)U_{t+s}$ となる．これは a, b を自然に G 上の A 値関数と考えたとき，

$$(ab)(r) = \sum_t a(t)t[b(-t+r)]$$

の成り立つことを示している．このことより G がリー群の場合にはコンパクトな台をもつ G 上の A 値連続関数の全体 $C_c(G; A)$ を考えておいて，$a, b \in C_c(G; A)$ に対してその積を

$$(ab)(r) = \int dt\, a(t)t[b(-t+r)]$$

として定め，$C_c(G; A)$ の閉包として得られる C^* 環を接合積 $A \rtimes G$ とよぶことにする．ここでさらに $a \in C_o(\mathbb{R}) \rtimes \mathbb{R}$ を $a(s,t) = [a(t)](s)$ と書き直して，コンパクトな台をもつ $\mathbb{R}^2$ 上の関数と思うと，a は

$$\begin{aligned}(a\xi)(r) &= \left(\int dt\ V_{a(t)}U_t\xi\right)(r) \\ &= \int dt\,[a(t)](r)\xi(r+t) \\ &= \int ds\ a(r, s-r)\xi(s) \qquad (s = r+t)\end{aligned}$$

として $L^2(\mathbb{R})$ に作用する．すなわち，核関数 k が $k(x,y) = a(x, y-x)$ として与えられる積分作用素になることがわかる．そして a はコンパクトな台をもつ $\mathbb{R}^2$ 上の関数であったから，核関数 k も同じ条件を満たし，したがって，このような k の生成する C^* 環はコンパクト作用素全体のなす C^* 環に同型となる．こうして，$C_o(\mathbb{R}) \rtimes \mathbb{R}$ が実は $\mathcal{K}$ と同型であることがわ

かった．一方，$C_o(\mathbb{R}^2)$ の元のワイル量子化や擬微分作用素による量子化はまさに $C_o(\mathbb{R})\rtimes\mathbb{R}$ の元として与えられていたのであった：

$$\hat{f}=\int dxdy\ g(x,y)V_xU_{\hbar y}$$

(g は f から定まるコンパクトな台をもつ $\mathbb{R}^2$ 上の関数) を思い出していただきたい．これより標語的に，

$C_o(\mathbb{R}^2)$ の量子化は $\mathcal{K}$ である

と言うことができる．

ここで構成した接合積は，群 G が局所コンパクトハウスドルフ空間 X に同相写像で作用している場合にも同様に定義される．とくに G を $PSL(2;\mathbb{R})$ の離散群として，G を一次分数変換により S^1 に作用させて得られる接合積 $C(S^1)\rtimes G$ は第 3 節で非可換幾何における指数定理を述べる際の主要な題材となる．

さらに，もうひとつの非可換化について述べておく．ワイル量子化は関数 $e^{i(xq+yp)}$ に量子化作用素

$$W_{(x,y)}=e^{i(xt+y\hbar\frac{1}{i}\frac{d}{dt})}=e^{\frac{i}{2}\hbar xy}e^{ixt}e^{iy\hbar\frac{1}{i}\frac{d}{dt}}$$

を対応させるものであった．これをさらに q についてもフーリエ変換しておくと，

$$W'_{(x,y)}=e^{\frac{i}{2}\hbar xy}e^{ix\frac{1}{i}\frac{d}{ds}}e^{iy\hbar\frac{1}{i}\frac{d}{dt}}$$

として $e^{i(xq+yp)}$ の量子化作用素が定まる．このとき $C_o(\mathbb{R}^2)$ の量子化として群 $\mathbb{R}^2$ の C^* 群環 $C^*(\mathbb{R}^2,\sigma)$ が現れる．ただし，ここではアーベル群 $\mathbb{R}^2$ の 2-コサイクル $\sigma(v,w)=\exp(i\hbar\langle v,w\rangle)$ を用いて C^* 群環の積をひねっている (ここに $\langle\ ,\ \rangle$ は $\mathbb{R}^2$ 上の通常のシンプレクティック型式を表す)．これは Moyal 積とよばれ，変形量子化において重要な役割を果たす．

1.2　非可換トーラス

今度は同様の手続きを2次元トーラス $\mathbb{T}^2 = \mathbb{R}/\mathbb{Z} \times \mathbb{R}/\mathbb{Z}$ に対して行い，その非可換化を導き出してみる．連続関数環 $C(\mathbb{T}^2)$ の元 f に対して，そのフーリエ変換 φ は $\mathbb{Z}^2$ 上の関数であって，フーリエ反転公式から

$$f(q,p) = \sum_{(n,m)\in\mathbb{Z}^2} \varphi(n,m)e^{2\pi inq}e^{2\pi imp}$$

が成り立つ．ここでも前と同様にして，$e^{2\pi inq}$, $e^{2\pi imp}$ の量子化作用素をそれぞれ $L^2(\mathbb{R})$ 上での e^{int} による掛け算作用素 V_n, $\theta m \in \mathbb{R}$ だけの平行移動が引き起こす作用素 $U_{\theta m}$ と定める．ここで

$$f(q,p) = \sum_{(n,m)\in\mathbb{Z}^2} \varphi(n,m)V_nU_{\theta m}$$

の生成する C^* 環を $\mathcal{A}_\theta$ で表そう．ここで， e^{it} による掛け算作用素を V, θ の平行移動が引き起こす作用素を U とおくとき，

$$UV = e^{i\theta}VU$$

が成り立つ．このとき $\mathcal{A}_\theta$ とは U と V で生成される C^* 環であると言ってもよい．これを $\mathbb{T}^2$ の量子化により現れた非可換 C^* 環と考えるのである．一方，群 $G=\mathbb{Z}$ を $\mathbb{T}=\mathbb{R}/\mathbb{Z}$ に作用させて得られる接合積を考える．いま θ を固定して $m\in\mathbb{Z}$ の作用を $m(x)=x+\theta m$ $(x\in\mathbb{R}/\mathbb{Z})$ と定めよう．これより $\mathbb{Z}$ が連続関数環 $C(\mathbb{T})$ に作用する．このとき接合積 $C(\mathbb{T})\rtimes\mathbb{Z}$ とは $\{\sum a_mU_m\}$ の閉包として得られる C^* 環で，積は $a_mU_ma_kU_k = a_mm(a_k)U_{m+k}$ により定められていた．ここで $a,b \in C(\mathbb{T})$ を $\mathbb{R}$ 上の周期1の関数とみて，この関数の定める掛け算作用素を V_a, V_b と表せば，$L^2(\mathbb{R})$ 上の作用素として $V_aU_mV_bU_k = V_{am(b)}U_{m+k}$ の成り立つことがわかる．したがって，$\mathcal{A}_\theta$ と $C(\mathbb{T})\rtimes\mathbb{Z}$ の生成元たちは a と V_a の同一視の下で同じ関係式を満たす．これより $\mathcal{A}_\theta$ は $C(\mathbb{T})\rtimes\mathbb{Z}$ に同型であることが確かめられる．この C^* 環 $\mathcal{A}_\theta$ は**非可換トーラス**とよばれ，再び標語的には，

トーラスの量子化は非可換トーラス $\mathcal{A}_\theta$ である

と言うことができる．ここで，一般に θ の値が異なると $\mathcal{A}_\theta$ は互いに同型でないことを注意しておく．

1.3　擬群 C^* 環

これまでは多様体 M をとり，その連続関数のなす可換 C^* 環 $C_o(M)$ を非可換化（量子化）することを考えてきた．ここではこれらの例を含む幾何的に興味深い非可換環は，ほとんどすべて擬群 C^* 環の概念を用いて理解されることを説明しよう．

まず擬群の概念に至るために，接合積 $C_o(X)\rtimes G$ における積をもう少し詳しく調べてみる．群 G が局所コンパクトハウスドルフ空間に同相写像により（右から）作用しているとき，G の各元は $C_o(X)$ の同型写像を引き起こし，これによって接合積 $C_o(X)\rtimes G$ が定まる．接合積の各元は線型和 $a=\sum_{g\in G}a_gU_g$, $b=\sum_{h\in G}b_hU_h$ と表され，積は

$$ab=\sum_{g,h}a_g g(b_h)U_{gh}$$

で定まる．ここで前と同じく a,b を $X\times G$ 上の関数として $a(x,g)=a_g(x)$, $(x,g)\in X\times G$, と考えることにすると，上の式は

$$(ab)(x,k)=\sum_{gh=k}a(x,g)b(xg,h)$$

と同値である．このとき右辺を畳み込み積のように解釈できないかと考えてみる．実際，$X\times G$ から X への二つの射 s,r を $s(x,g)=xg$, $r(x,g)=x$ と定めておき，$\alpha=(x,g)$, $\beta=(y,h)\in X\times G$ に対して条件 $s(\alpha)=r(\beta)$ が成り立つときに限り

$$\alpha\beta=(x,gh)$$

と積を定め，また任意の $\alpha = (x, g) \in X \times G$ に対してその逆元を

$$\alpha^{-1} = (xg, g^{-1})$$

と定めることにする．下の図で見るとおり，積 $\alpha\beta$ は矢印 α と β を合成したものに，逆元は逆向きの矢印に対応していると考えられる．

$$\underset{x}{\bullet} \xleftarrow{\ \alpha\ } \underset{xg=y}{\bullet} \xleftarrow{\ \beta\ } \underset{xgh=yh}{\bullet} \qquad\qquad \underset{x}{\bullet} \xrightarrow{\ \alpha^{-1}\ } \underset{xg}{\bullet}$$

こう考えると，接合積における積の定義式は次のように書き換えられる：

$$(ab)(\gamma) = \sum_{\alpha\beta} a(\alpha)b(\beta) = \sum_{\beta} a(\gamma\beta^{-1})b(\beta).$$

積が条件つきで定義されていることを除けば，右辺はまさに群環における畳み込み積（合成積）に他ならない．

もうひとつ例を挙げよう．局所コンパクトハウスドルフ空間 X をとったとき，コンパクトな台をもつ $X \times X$ 上の連続関数はこれを積分核として $L^2(X)$ 上の作用素を定める．ここで k と l をこのような二つの関数とするとき，これらから定まる作用素 K と L の合成 KL に対応する積分核 kl は

$$(kl)(x, z) = \int dy\, k(x, y)l(y, z)$$

と与えられる．これもまた，$X \times X$ から X への二つの射 s, r を $s(x, y) = y$，$r(x, y) = x$ とおき，$\alpha = (x, y)$，$\beta = (z, w) \in X \times X$ に対して条件 $s(\alpha) = r(\beta)$ が成り立つときに限りその積を $\alpha\beta = (x, w)$ と定め，また $\alpha = (x, y) \in X \times X$ の逆元を $\alpha^{-1} = (y, x)$ と与えることにすると，上の式は

$$(kl)(\gamma) = \int_{\alpha\beta=\gamma} dy\, k(\alpha)l(\beta) = \int_{\beta} d\beta\ k(\gamma\beta^{-1})l(\beta)$$

と表される．これも畳み込み積と考えてよいであろう．

このように s (*source*) と r (*range*) を定める二つの射をもつ集合であって:

- $s(\alpha) = r(\beta)$ のとき積 $\alpha\beta$ が定まり；
- 任意の α に対して逆元 α^{-1} が存在する；

ものを擬群とよぶ．擬群が与えられたならば（適当な測度の存在を仮定して）コンパクトな台をもつ連続関数の全体 $C_c(G)$ に畳み込み積が定まることはこれまでの例より了解できるであろう．そして $C_c(G)$ の閉包をとることで**擬群 C^* 環** $C^*(G)$ が定義されることになる．

さらにいくつか擬群の例を挙げる．群 Γ が被覆変換群として，空間 X に作用しているとする： つまり $X \to X/\Gamma$ は被覆空間である．このとき $X \times X$ の２点 $\alpha = (x, y)$, $\alpha' = (x', y')$ に対し，ある $\gamma \in \Gamma$ が存在して $(x\gamma, y\gamma) = (x', y')$ が成り立つときに限り α は α' に同値であると定める．ここで，商集合 $G = (X \times X)/\sim$ から X/Γ への写像 s, r を

$$s(\alpha) = [y]\,, \quad r(\alpha) = [x]$$

と定めると，G は擬群の構造をもつ．ここで X/Γ がコンパクトと仮定しておくと，擬群 C^* 環 $C^*(G)$ は，連続な積分核をもち $L^2(X)$ 上の Γ 作用と可換な作用素の生成する C^* 環と同型になる．

トーラス $\mathbb{T}^2 = \{(x, y) \in \mathbb{R}/\mathbb{Z} \times \mathbb{R}/\mathbb{Z}\}$ 上に傾き θ の流れを考える：すなわちベクトル場 $\frac{\partial}{\partial x} + \theta\frac{\partial}{\partial y}$ に沿う流れをつくる．このとき流れに沿って $\mathbb{T}^2$ 内の２点を結ぶ有向線分（これは端点と向きのみで決まる）の全体を G とおき，$s, r : G \to \mathbb{T}^2$ を

$$s(\gamma) = \gamma \text{の始点}\,, \quad r(\gamma) = \gamma \text{の終点}$$

とおく．このとき G の積は有向線分の合成，逆元は向きを逆にした線分と定めて，G に擬群構造を入れることができる．このとき $\mathbb{T}^2$ の流れ（葉層構造）から定まるホロノミー擬群は G に一致しており，したがって擬群 C^* 環 $C^*(G)$ は流れ（葉層構造）の定める葉層 C^* 環に同型となる．いま $\mathbb{T}^2 = \{(x, y) \in \mathbb{R}/\mathbb{Z} \times \mathbb{R}/\mathbb{Z}\}$ 上で先に与えた流れに沿いながら $\{x\} \times \mathbb{T} \cong \mathbb{T}$

をx方向にずらしてゆき，一周したときに生じる$\mathbb{T}$上の変換をホロノミー変換とよぶ．実はホロノミー変換がちょうどθの平行移動であることの帰結として，$C^*(G)$が非可換トーラス$\mathcal{A}_\theta$と$\mathcal{K}$のテンソル積に同型となることもわかる．

このように擬群C^*環は幾何的にみて興味深い非可換C^*環の例を与えてくれる．そして非可換幾何学における指数定理とは，この擬群C^*環の射影元として定式化されたディラック(Dirac)作用素の指数を，非可換環を逆に可換化して導かれる幾何的な不変量で記述する定理と言うことができる．しかしそれを述べる前にまず節を改めて，従来のAtiyh-Singerの指数定理について述べることにする．

2° Atiyah-Singer の指数定理

2.1　ディラック作用素と指数定理

指数定理とはコンパクト多様体上の楕円型微分作用素Dの指数($\dim\ker D - \dim\ker D^*$)を位相幾何的不変量を用いて記述した公式と言うことができる．そして指数定理における楕円型微分作用素Dとしてはディラック作用素が本質的な役割を果たす．そのため，まずディラック作用素を量子化と関連づけながら導入していこう．

先に$T\mathbb{R} \cong \{(q,p) \mid q,p \in \mathbb{R}\}$において，運動量$p$を$\frac{1}{i}\frac{d}{dt}$に置き換えて，あるいは$e^{iyp}$を$\mathbb{R}$上の平行移動に置き換えて量子化の手続きを行った．それでは$\mathbb{R}^3$における回転($SO(3)$の作用)が現れてくるような量子化は何であろうか．それはよく知られているように軌道角運動量の量子化である．古典的に軌道角運動量とは，ベクトル積$\boldsymbol{L} = \boldsymbol{r} \times \boldsymbol{p}$で与えられるベクトル量である．この$\boldsymbol{r}$の各成分関数を正準量子化して得られる量子化作用素は$L^2(\mathbb{R}^3)$に作用する微分作用素であり，それは$\mathbb{R}^3$への$SO(3)$の作用から決まる無限小変換，すなわち関数へのリー微分である．このときヒル

ベルト空間 $L^2(\mathbb{R}^3)$ には，ハミルトニアンの量子化作用素であるラプラシアン

$$\Delta = -\left(\frac{\partial^2}{\partial x^2} + \frac{\partial^2}{\partial y^2} + \frac{\partial^2}{\partial z^2}\right) (+\text{ポテンシャル})$$

と，角運動量の大きさの 2 乗 $\boldsymbol{L}^2$ の量子化作用素である $\hat{\boldsymbol{L}}^2$（球面に沿うラプラシアン）と，$\boldsymbol{L}$ のひとつの成分 L_i の量子化作用素 $\hat{L}_i$ が可換に作用しており，さらにこれらの三つの物理量は完全系をなしている：つまりこれらの自己共役作用素は同時対角化可能で，それぞれの固有値を与えることで固有ベクトルは phase を除き一意に決定される．したがって，量子力学の導く予言によれば，たとえば水素原子の状態はこのスペクトルを観測することで決定できるはずである．しかし実際の観測においては 1 本のスペクトルがしばしば 2 本に分裂することから，この量子化は十分には正しくないと考えられた．そしてこの欠陥を克服するために，スピンの概念が導入されたのである．つまり，考えるべき正しいヒルベルト空間は $L^2(\mathbb{R}^3)$ ではなく $L^2(\mathbb{R}^3) \otimes \mathbb{C}^2$ であり，そこに作用するリー群は $SO(3)$ ではなく，その二重被覆群である $SU(2)$ $(= Spin(3))$ であるべきと考えられたのである．数学的には以下のように言い直すことができる．

まず $\mathbb{R}^3$ 上のベクトル束 $S = \mathbb{R}^3 \times \mathbb{C}^2$（これをスピン束とよぶ）をとり，考えるヒルベルト空間として S の L^2-切断の全体である $L^2(\mathbb{R}^3, S) \cong L^2(\mathbb{R}^3) \otimes \mathbb{C}^2$ を選ぶ．次にスピン束 S に（$SO(3)$ には落ちない）$SU(2)$ の作用を考え，この作用の無限小変換として現れるリー微分 J_i を $\hat{L}_i$ の替わりにとる．ここでベクトル量 $\boldsymbol{J} = (J_i)$ を全角運動量とよぶ．そして，軌道角運動量の大きさの 2 乗 $\boldsymbol{L}^2$ を全角運動量の大きさの 2 乗 $\boldsymbol{J}^2$ に置き換える．そして，ラプラシアン Δ に置き換わるべき作用素として現れるものが（質量項のない）ディラック作用素 D なのである．このとき D は J_i とは可換であるが L_i とは可換でないことを注意しておく．ここで，具体的

に D は

$$D = \sigma_1 \frac{1}{i}\frac{\partial}{\partial x_1} + \sigma_2 \frac{1}{i}\frac{\partial}{\partial x_2} + \sigma_3 \frac{1}{i}\frac{\partial}{\partial x_3} = \sum_{i=1}^{3} c_i \nabla_i$$

と与えられる．ただし，σ_i はパウリのスピン行列：

$$\sigma_1 = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}, \quad \sigma_2 = \begin{pmatrix} 0 & -i \\ i & 0 \end{pmatrix}, \quad \sigma_3 = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & -1 \end{pmatrix}$$

を表し，$c_i = (1/i)\sigma_i$, $\nabla_i = \partial/\partial x_i$ とする．このとき c_i たちはクリフォード関係式：$c_i^2 = -1$, $c_i c_j + c_j c_i = 0$ $(i \neq j)$ を満たしている．さらにこの式より，$D^2 = \Delta \otimes 1$ が成り立つこともわかる．

これが $\mathbb{R}^3$ 上の**ディラック作用素**である．そして，$\mathbb{R}^2$ 上のディラック作用素とはこの D を自然に制限して得られる作用素と定義する．すなわち

$$D = \sum_{i=1}^{2} c_i \nabla_i = 2 \begin{pmatrix} 0 & \frac{\partial}{\partial z} \\ \frac{\partial}{\partial \bar{z}} & 0 \end{pmatrix}$$

である．ただし

$$\frac{\partial}{\partial \bar{z}} = \frac{1}{2}\left(\frac{\partial}{\partial x} + i\frac{\partial}{\partial y}\right), \qquad \frac{\partial}{\partial z} = \frac{1}{2}\left(-\frac{\partial}{\partial x} + i\frac{\partial}{\partial y}\right)$$

と表した．このように $\mathbb{R}^2$ 上のディラック作用素の定義には，Cauchy-Riemann 作用素 $\partial/\partial\bar{z}$ とその共役が自然に現れてくる．

次に，この式を用いて $\mathbb{R}^{2n}$ 上のディラック作用素を定義する．空間の直積をとると L^2 空間はテンソル積になるから，$\mathbb{R}^{2n} = (\mathbb{R}^2)^n$ を量子化するとき考えるヒルベルト空間は $L^2(\mathbb{R}^2, S)^{\otimes n}$ である．そしてこのヒルベルト空間に作用するディラック作用素 D は，$\xi_i \in L^2(\mathbb{R}^2, S)$ として

$$D(\xi_1 \hat{\otimes} \cdots \hat{\otimes} \xi_n) = \sum_{i=1}^{n} (\pm)\xi_1 \hat{\otimes} \cdots \hat{\otimes} D\xi_i \hat{\otimes} \cdots \hat{\otimes} \xi_n$$

で与えられる．ここで，スピノール $\xi \in L^2(\mathbb{R}^2, S)$ は $S = \mathbb{C}^2$ の第一成分にのみ値をとるとき偶スピノール，第二成分にのみ値をとるとき奇スピノールとよばれる．そして，D はスピノール $\xi_i \in L^2(\mathbb{R}^2, S)$ の偶奇に関して歪微

分[2] であるように作用させている(このことを示すために記号 $\hat{\otimes}$ を用いた). こうして定まる作用素 D は $\mathbb{R}^{2n}$ 上のスピン束 $S = \mathbb{R}^{2n} \times (\mathbb{C}^2)^{\otimes n}$ の L^2 空間 $L^2(\mathbb{R}^{2n}, S)$ に作用する自己共役な1階楕円型微分作用素で, $D^2 = \Delta \otimes 1$ を満たす. さらに $L^2(\mathbb{R}^2, S)$ の偶奇を自然に $L^2(\mathbb{R}^{2n}, S)$ に延長して, 再びスピン束を $S = S^+ \oplus S^-$ のように偶部分と奇部分に分解することができる. この偶奇に関する次数作用素を $S^+ \oplus S^-$ の分解を用いて

$$\varepsilon = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & -1 \end{pmatrix}$$

と定めると, ディラック作用素に関し $D\varepsilon = -\varepsilon D$ が成り立つ.

一般の多様体 M 上ではスピン構造を仮定するとスピン束とよばれるベクトル束 $S \to M$ が存在する. ここで M にリーマン計量を与えておくと, これより定まるリーマン接続が S の接続 ∇ を自然に定め, ディラック作用素 $D\colon \Gamma(M, S) \to \Gamma(M, S)$ は

$$D\xi = \sum_{i=1}^{k} c_i \nabla_i \xi$$

で与えられる. ここで接空間の正規直交基底 $(e_i)_{i=1}^{k}$ により定まる e_i のクリフォード積を c_i とし, e_i 方向への共変微分を ∇_i と表す. このとき D は自己共役な1階楕円型微分作用素になっている.

さらに, M が偶数次元のときにはスピン束が $S = S^+ \oplus S^-$ と分解し, ε をその次数作用素として $D\varepsilon = -\varepsilon D$ が成り立つ. すなわち, ディラック作用素は

$$D = \begin{pmatrix} 0 & D^- \\ D^+ & 0 \end{pmatrix}, \qquad (D^+)^* = D^-$$

と表現される. このとき次の定理が成り立つ.

---

[2] 歪微分とは微分則 $D(ab) = (Da)b + (-1)^{|a|}a(Db)$ を満たすもののことをいう. ただし $|a|$ は a の偶奇に応じて 0 と 1 を表す記号である.

定理 2.1 (Atiyah-Singer 指数定理) 偶数次元のコンパクトなリーマン多様体がスピン構造をもつと仮定する．ここでディラック作用素 D に対してその指数を

$$\mathrm{Ind}\,(D) = \dim(\ker D^+) - \dim(\ker D^-)$$

と定める．このとき

$$\mathrm{Ind}\,(D) = \int_M \widehat{A}(R)$$

が成り立つ．

ここで，$\widehat{A}(R)$ は $\widehat{A}$ 型式とよばれる M の微分型式で

$$\widehat{A}(R) = \det{}^{1/2} f\left(\frac{\sqrt{-1}}{2\pi}R\right), \quad f(z) = \frac{z/2}{\sinh(z/2)}$$

と定義される．ただし，R は M のリーマン曲率テンソルを，$\det^{1/2}$ はファフ行列式 (Pfaffian) を表す．定義の詳細については古田 [11]，吉田 [14] を参照されたい．また，指数定理についてさらに詳しく知りたい読者には，参考文献として上記の著書のほかに [13] を挙げておく．

2.2 Atiyah-Singer 指数定理の拡張

Atiyah と Singer はさらに，以下のような作用素に対して指数定理を拡張した：

- コンパクトリー群・有限群などの群作用と同変な作用素 [5][4]；
- 被覆空間に持ち上げられた作用素 [1]；
- 作用素の族 $(D_x)_{x\in X}$ [5].

第一の場合には作用素の指数の定義をどのように拡張すべきかを想像することは難しくないだろう．コンパクト群 G が作用しているときは作用素がその作用について同変であるとしてよいから，

$$\mathrm{Ind}\,(D) = \ker D^+ - \ker D^- \in R(G)$$

と定めればよい．ここで $\ker D^+$ や $\ker D^-$ は G の表現空間として，その差を G の表現環 $R(G)$ の元とみなすのである．コンパクトリー群に対しては G の表現と C^* 群環 $C^*(G)$ に属する射影元を考えることは同等であるから，この場合には指数とは $\ker D^\pm$ への射影元の差と考えてもよい．

第二の場合に作用素の指数を拡張するためには，もう少し深く作用素の解析的性質を調べておく必要がある．Atiyah-Singer により指数定理が発表された数年後，Patodi により D^2 の熱核を用いた別証明が与えられた ([2] を参照)．多様体がコンパクトのとき熱核 e^{-D^2} はトレース型作用素となるが，このとき

$$\mathrm{Ind}\,(D) = \mathrm{Tr}\,(\varepsilon e^{-D^2})$$

が成り立つ (Tr は作用素のトレースを表す)．しかもこの値は t によらない．右辺において $t \to \infty$ とすると εe^{-D^2} は射影元の差に弱収束し，これはまさに $\mathrm{Ind}\,(D)$ の定義に他ならない．一方，$t \to 0$ とすると εe^{-D^2} の核関数は $M \times M$ の対角部分に集中し，各点でトレースをとるとその極限は指数定理の右辺に現れた $\widehat{A}$ 型式に一致することが確かめられる．Atiyah はこの式に導かれて，被覆空間 $\widetilde{M}$ に持ち上げたディラック作用素 D に対する指数定理を以下のように定式化した．被覆変換群を Γ として，まず $\ker D^+$, $\ker D^-$ への射影作用素 e_+, e_- が Γ のフォン・ノイマン (von Neumann) 群環と有界作用素の全体のテンソル積 $W^*(\Gamma) \otimes \mathcal{L}$ に属することが確かめられる．そしてこの環のトレース τ を用いて持ち上げた作用素の指数を

$$\mathrm{Ind}_\Gamma(D) = \tau(e_+) - \tau(e_-)$$

と定義すると

$$\mathrm{Ind}_\Gamma(D) = \int_{\mathcal{D}} dx\ \mathrm{Tr}\,(\varepsilon k(x,x))$$

が成り立つ．ここで $k(x,y)$ は e^{-D^2} の積分核を表し，$\mathcal{D}$ は $\widetilde{M}$ に作用する被覆変換群 Γ の基本領域を表す．

第三の場合には，作用素の族 $\boldsymbol{D}=(D_x)_{x\in X}$ の指数は K 群 $K^0(X)$ の元として定式化される．粗い言い方をすれば $(\ker D_x^{\pm})_{x\in X}$ を X 上のベクトル束と考えて，この差を K 群 $K^0(X)$ の元とみなす．この場合にも，K 群の元である指数をコホモロジー群の元として表す指数公式が得られている．

これらの結果を総括して考えたとき，ここから Connes による非可換幾何学の枠組を用いた指数定理へ至る道筋は極めて自然に思われてくる．

3° 非可換幾何における指数定理

3.1　葉層多様体上の指数定理

$(M,\mathcal{F})$ を p 次元の葉層構造 $\mathcal{F}$ をもつコンパクトな多様体とする．いま M 上にホロノミー不変な横断測度 ν が存在すると仮定しよう．Ruelle-Sulivan によれば，このとき次のようにして p 次カレント C_{RS} が定まる．

$$\int_{C_{RS}}\omega=\sum_i\int_{T_i}d\nu\int_{(L_t)_{t\in T}}\rho_i\omega$$

ここで，ω は M 上の p-form，ρ_i は葉層座標系 $U_i\cong O_i\times T_i$ (T_i が葉に横断的) に従属する1の分割で，$\int_{(L_t)_{t\in T}}$ は U_i 内の葉に沿う積分，$\int_{T_i}d\nu$ は横断測度 ν に関する積分を表す．横断測度がホロノミー不変であることから C_{RS} は閉カレントになり，さらに葉に沿う微分型式のつくる複体 $\Omega(\mathcal{F})$ の双対元

$$C_{RS}\colon\Omega^p(\mathcal{F})\to\mathbb{R}$$

で，$C_{RS}(d_\ell\omega)=0$ を満たすものを与える (ただし d_ℓ は葉に沿う外微分を表す)．ここで $(M,\mathcal{F})$ に葉に沿うリーマン計量を与えておき，さらに葉に沿うディラック作用素の族 $\boldsymbol{D}=(D_\ell)_{\ell\in\mathcal{F}}$ を考える (スピン構造は仮定しておく)．ここでホロノミー擬群から定まる擬群 C^* 環を C^* 環 $C^*(M,\mathcal{F})$ と表し，これを葉層多様体 $(M,\mathcal{F})$ の葉層 C^* 環 とよぶ．このとき $\boldsymbol{D}$ をホロノミー擬群に持ち上げた作用素を再び $\boldsymbol{D}$ と表すと，$\boldsymbol{D}^+=(D_\ell^+)_{\ell\in\mathcal{F}}$ の

グラフ射影元 $e_{\boldsymbol{D}}$ について $e_{\boldsymbol{D}} - e_1$ は葉層 C^* 環 $C^*(M, \mathcal{F})$ に属することがわかる (ここで $e_1 = (1-\varepsilon)/2$).

定理 3.1 (葉層多様体における Connes の指数定理) 上記の仮定の下に

$$\mathrm{Ind}\,(\boldsymbol{D}) = e_{\boldsymbol{D}} - e_1 \in K^0(C^*(M, \mathcal{F}))$$

とおく. いまホロノミー不変横断測度 ν の定める $C^*(M, \mathcal{F})$ 上のトレースを τ と表すとき,

$$\tau(\mathrm{Ind}\,(\boldsymbol{D})) = \int_{C_{RS}} \widehat{A}(R_{\mathcal{F}})$$

が成り立つ. ここに $\widehat{A}(R_{\mathcal{F}})$ は葉に沿うリーマン曲率 $R_{\mathcal{F}}$ の $\widehat{A}$ 型式である.

この定理を基点として Connes は葉層多様体に対して Atiyah-Singer 指数定理の拡張を行った. 彼は非可換幾何学という枠組を提起して, より広い立場から Atiyah-Singer 指数定理を捉え直そうと試みたのである. そこではバナッハ環に対する K 群や巡回コホモロジー理論, 巡回コサイクルと K 群との対合など説明すべき重要事項は多いが, それについては文献 [6, 7, 8, 9, 12] を参照していただきたい. 残りの項では III 型のフォン・ノイマン環が関与する一次分数変換群と $C(S^1)$ の接合積, あるいはそれと森田同値な C^* 環に関する指数定理を述べて, その一端を紹介するにとどめる.

3.2 Modular 自己同型と指数定理

まず Σ を閉リーマン面とし, M をその普遍被覆空間とする. いま Σ の種数を 2 以上として, Γ をその基本群とする. ここで Γ が一次分数変換により S^1 に作用していると仮定しよう. これより $X = (M \times S^1)/\Gamma$ として (ただし Γ は $(m, x)g = (mg, xg)$ として $M \times S^1$ に作用する) Σ 上の葉層束を構成する. このとき $G = (M \times M \times S^1)/\Gamma$ として (作用は上と同じく対角作用), $s, r : G \to X$ を

$$s([x, y, t]) = [y, t], \qquad r([x, y, t]) = [r, t]$$

とおくと，G は擬群の構造をもつ．これより定まる擬群 C^* 環を $\mathcal{A}$ と表すとき，$\mathcal{A}$ は次の荷重 w をもつ：

$$w(k) = \int_{\mathcal{D}\times S^1} dtdx\ k(x,x,t)$$

ただし $\mathcal{D}$ は M における Γ 作用の基本領域を表す．

このとき w から定まるモジュラ (Modular) 自己同型 $(\sigma_t)_{t\in\mathbb{R}}$ が存在することが知られているが，それはどのような自己同型なのだろうか．ここでは以下のような理解しやすい形で，これと本質的に同じ自己同型を記述してみる．まず dt は通常の S^1 の測度とし，dx を Γ 不変な M の測度としておく．一方，X の測度を持ち上げて得られる $M\times S^1$ 上の不変測度を $d\mu$ として，

$$\psi = \frac{dx\times dt}{d\mu}$$

とおく．このとき $\sigma_t(k) = \psi^{it}k\psi^{-it}$ と定めれば，これが本質的にモジュラ自己同型を与える．さらに $\phi = \log\psi$ とおこう．これを用いて $\mathcal{A}$ 上の巡回2-コサイクルを以下に定める：

$$\tau(a_0,a_1,a_2) = \int_{\mathcal{D}\times S^1} dxdt\ Tr(a_0[\phi,a_1][\dot{\phi},a_2] - a_0[\dot{\phi},a_1][\phi,a_2])$$

ただし $\dot{\phi} = \frac{\partial\phi}{\partial t}$ であり，$\mathcal{D}$ は被覆空間の基本領域を表す．ここで前と同様に葉に沿うディラック作用素の族 $\boldsymbol{D} = (D_\ell)_{\ell\in\mathcal{F}}$ を考え，持ち上げた作用素 $\mathcal{D}^+ = (D_\ell^+)_{\ell\in\mathcal{F}}$ のグラフ射影元 $e_{\boldsymbol{D}}$ をとると，再び $e_{\boldsymbol{D}} - e_1$ $(e_1 = (1-\varepsilon)/2)$ は $\mathcal{A}$ に属することがわかる (実際 $\mathcal{A}$ は葉層束の葉層 C^* 環と一致する)．このとき次の定理が成り立つ．

定理 3.2 (森吉-夏目[10])　いま τ を上で与えた巡回 2-コサイクルとする．このとき

$$\mathrm{Ind}\,(\boldsymbol{D}) = e_{\boldsymbol{D}} - e_1 \in K^0(C^*(M,\mathcal{F}))$$

とおけば，

$$\tau(\mathrm{Ind}\,(\boldsymbol{D})) = \frac{1}{\pi i}\int_X GV$$

が成り立つ．ただし GV は葉層束 X の **Godbillon-Vey** 類を表す．

この定理はモジュラ自己同型から導かれる二つの微分に関して，それから定まる非可換幾何での“曲率”が葉層束 X の Godbillon-Vey 類で与えられることを示している．

4° 非可換幾何学の展望

指数定理を非可換幾何学の枠組の中で拡張しようとする試みは，多くの新しい概念を生み出しながら現在も発展しつつある．たとえば幾何学において重要な概念である微分型式・ベクトル束・コホモロジー論・ホモロジー論などについては非可換幾何学における対応概念が存在しており，それぞれ巡回コサイクル・射影元・K コホモロジー論・K ホモロジー論等に一般化されて研究されている．これらの理論はまた作用素環論や物理学における変形量子化理論・弦理論の最近の発展にも密接に関連し，幾何学と物理学との驚くべき関連も見出されている．

このような状況は，80 年代から 90 年代にかけて数学と物理学との結びつきが密接となり，抽象から具象へ向かう数学の時代が訪れつつあることと無関係ではないだろう．かつて 20 世紀初頭のアインシュタインたちの時代に数学と物理学との混沌の中からそれぞれの領域で大きな発展が遂げられたが，21 世紀に向けて同じように生じつつある数学と物理学との混沌の中で，非可換幾何学はその中心の一つに位置していると言っても過言ではないと思われる．

参考文献

[1] M. Atiyah, *Elliptic operators, discrete groups and von Neumann algebras*, Astérisque **32** (1976), 43–72.

[2] M. Atiyah, R. Bott and V. K. Patodi, On the heat equation and the index theorem, *Invent. Math.* **19** (1973), 279–330.

[3] M. Atiyah, V. K. Patodi and I. M. Singer, Spectral asymmetry and Riemannian geometry I, *Cambr. Phil. Soc.* **77** (1975), 43–69; II, **78** (1975), 405–432; III, **79** (1976), 71–99.

[4] M. Atiyah and G. Segal, The index of Elliptic operators II, *Ann. of Math.* **87** (1968), 531–545.

[5] M. Atiyah and I. M. Singer, The index of Elliptic operators I, *Ann. of Math.* **87** (1968), 484–530; III, **87** (1968), 546–604; IV, **93** (1971), 119–138; V, **93** (1971), 139–149.

[6] B. Blackadar, *K-theory for operator algebras*, Mathematical Sciences Research Institute Publications **5**, Springer-Verlag New York-Berlin, 1986.

[7] A. Connes, Non-commutative differential geometry I and II, *Publ. Math. IHES*, **62** (1986), 257–360.

[8] A. Connes, Cyclic cohomology and the transversal fundamental class of a foliation, in *Geometric Method in Operator Algebras* (H. Araki and E. G. Effros, eds.), Pitman Research Notes in Math. Series **123** (1986), Longman Scientific and Technical, 52–144.

[9] A. Connes, *Noncommutative Geometry*, Academic Press, 1994.

[10] H. Moriyoshi and T. Natsume, The Godbillon-Vey cyclic cocycle and longitudinal Dirac operators, *Pacific Journal of Mathematics*, vol. 172, no. 2 (1996), 483–539.

[11] 古田幹雄，指数定理 1，岩波講座 現代数学の展開 **17**，岩波書店，1999.

[12] 夏目利一・森吉仁志，作用素環と幾何学，数学メモワール第2巻，日本数学会，2001.

[13] 吉田朋好・他，指数定理の裾野，数学のたのしみ第16巻，日本評論社，1999.

[14] 吉田朋好，ディラック作用素の指数定理，共立講座 21世紀の数学 **22**，共立出版，1998.

編者　荒木不二洋（あらき・ふじひろ）——京都大学名誉教授

著者　青木健一（あおき・けんいち）——金沢大学理学部物理学教室
泉　正己（いずみ・まさき）——京都大学大学院理学研究科
磯崎　洋（いそざき・ひろし）——東京都立大学大学院理学研究科
廣島文生（ひろしま・ふみお）——摂南大学工学部数学物理学系教室
森吉仁志（もりよし・ひとし）——慶應義塾大学理工学部数理科学科
吉田伸生（よしだ・のぶお）——京都大学大学院理学研究科
渡辺　浩（わたなべ・ひろし）——日本医科大学基礎科学

数理物理への誘い4——最新の動向をめぐって

2002年8月2日　第1版第1刷発行

定価はカバーに
表示しています

編　者　荒木不二洋
発行者　西原昌幸
発行所　遊星社
〒164-0001 東京都中野区中野3丁目50－1
電話（03）3381-5914　振替 00140-5-137657
発売元　星雲社
〒112-0012 東京都文京区大塚3丁目21－10
電話（03）3947-1021　Fax（03）3947-1617

印刷・製本＝平河工業社　ISBN4-7952-6896-7